



Matematikkommissionen - afrapportering

Grønbæk, Niels; Rasmussen, Anne-Birgitte ; Skott, Charlotte Krog Skott; Bang-Jensen, Jesper Bang-Jensen; Fajstrup, Lisbeth; Schou, Marit Hvalsøe; Christensen, Maybrit ; Lumholt, Michael; Kjærup, Rikke ; Jørgensen, Solvejg; Hansen, Steen Laugesen; Markvorsen, Steen

Publication date:
2017

Document version
Også kaldet Forlagets PDF

Citation for published version (APA):
Grønbæk, N., Rasmussen, A-B., Skott, C. K. S., Bang-Jensen, J. B-J., Fajstrup, L., Schou, M. H., Christensen, M., Lumholt, M., Kjærup, R., Jørgensen, S., Hansen, S. L., & Markvorsen, S. (2017). *Matematikkommissionen - afrapportering*. Undervisningsministeriet.

Matematikkommissionen

Afrapportering

Matematikkommissionen

Afrapportering

Forfatter: Matematikkommissionen

Indhold

Forord.....	4
1 Indledning.....	5
2 Kommissionens centrale anbefalinger.....	9
3 Tydelige niveauer: C-, B- og A-niveauernes profil.....	11
4 Mindstekrav og basale færdigheder.....	13
5 Matematik i grundforløbet på de 3-årige gymnasiale uddannelser.....	15
6 Det faglige indhold.....	18
7 Matematik og digitale teknologier (CAS)	21
8 Styrket samspil med studieretningens centrale fag.....	23
9 Nye prøveformer	26
10 Barrierer ved overgange i uddannelsessystemet skal reduceres	29
11 Lærernes didaktiske og pædagogiske kompetencer skal styrkes	32
12 Bilag.....	34
12.1 Bilag 1: Kommissorium for matematikkommission for de gymnasiale uddannelser.....	34
12.2 Bilag 2: Kommissionens sammensætning.....	39
12.3 Bilag 3: Kommissionens aktiviteter	41
12.4 Bilag 4: Overordnede principper	41
12.4.1 Robusthed	41
12.4.2 Mindstekrav og basale færdigheder	41
12.4.3 Grundlag, Transversalt og Longitudinalt matematisk arbejde.....	43
12.4.4 Matematiske kerneaktiviteter, out- og insourcing.....	44
13 Referencer.....	46

Forord

Matematikkommissionen er nedsat som følge af ønsket om at styrke det faglige niveau i matematik i gymnasiet. Kommissionen skal bl.a. give forslag til udvikling af fagets indhold, didaktik, prøveformer og faglige overgange dels fra grundskole til gymnasiale uddannelser og dels videre til videregående uddannelser.

Rammerne for kommissionens arbejde er fastlagt i kommissoriet og det tilhørende bilag, der indeholder de relevante elementer fra den politiske aftale af 3. juni 2016 om styrkede gymnasiale uddannelser (se bilag 1). Det betyder blandt andet, at kommissionen ikke skal forholde sig til strukturen af de gymnasiale uddannelser, adgangskravene til de gymnasiale uddannelser og kravet om at de fleste elever skal have matematik på mindst B-niveau. Hertil kommer, at gennemførelse af kommissionens anbefalinger ikke må være udgiftsdrivende. Den korte tidsramme på tre måneder for kommissionens arbejde taget i betragtning, har det ikke været muligt at gennemføre nye analyser på området. Kommissionens anbefalinger er således baseret på allerede gennemførte analyser, undersøgelser og erfaringer.

Inden for disse rammer har kommissionen udarbejdet en række anbefalinger, som den vurderer, vil bidrage til den ønskede styrkelse af det faglige niveau i matematik.

Overordnet set er målet med anbefalingerne, at der sikres en bedre sammenhæng i matematikundervisningen mellem forskellige uddannelsesniveauer, og at elevernes matematikbeherskelse styrkes. I sit arbejde har kommissionen fundet frem til tre temaer, som sammenfatter kommissoriets problemfelt.

- **Robusthed:** Øget robusthed i elevernes omgang med faget og træning i basale færdigheder.
- **Samspil:** Stærkere fokus på matematik ”på tværs” af anvendelsesfelter og centrale fag – altså matematik med en eksternt orientering.
- **Progression:** Bedre indsigt i matematik ”på langs” – altså internt i matematikken på langs af uddannelsesforløbene.

Kommissionen anbefaler, at disse tre fokuspunkter benyttes som gennemgående tematik i læreplanerne såvel som i det daglige arbejde på skolerne.

Rapportens anbefalinger bygger videre på det arbejde, som gymnasielærerne udfører i dag. En del af anbefalingerne vedrører matematikfaget selv, og disse kan implementeres ved en opgradering dels af læreplanerne i matematik, gennem nye emner og nyt fokus, dels af prøveformerne, gennem nye formater og krav. Andre anbefalinger vedrører samspillet med andre fag, og disse anbefalinger kan gennemføres ved koordination med læreplanerne i disse fag.

Overgangsproblemer fra grundskole til gymnasiet sætter fokus på samarbejdet mellem lærerne i de to uddannelser. Her spiller grundforløbet en betydningsfuld rolle.

Styrkelse af lærerkompetencerne med vægt på matematikdidaktik sætter fokus på pædagogikum og efteruddannelsesinitiativer rettet mod udvalgte forhold for matematik - både de rent faglige forhold og angående elevernes motivation for og syn på faget i uddannelserne.

Matematikkommissionen

1 Indledning

I gymnasieaftalen af juni 2016 er der sat særligt fokus på matematikfaget, således som der også har været i tidligere uddannelsesreformer. Dette er formentlig sket i erkendelsen af fagets særlige status og fundamentale betydning for samfundets behov for teknologisk og administrativ styring og udvikling samt for civilisatoriske forhold. Andre af uddannelsernes fag har naturligvis lignende afgørende roller, men nogle forhold begrundes matematiks særlige position.

At matematik har en fundamental betydning skyldes fagets beskrivelses- og aktionspotentiale. Matematikkens substans er begreber, som er så robuste, at vi kan behandle og bruge dem som ting. Vi *flytter rundt* på led i udtryk og ligninger, vi *lægger sammen* og *trækker fra*, vi *opløfter i potenser*, kurver *skærer hinanden*, osv. Disse begreber har deres udgangspunkt i behov for at skildre aspekter af 'virkeligheden' med henblik på at forstå den og forbedre den. Matematikken har således rod i kontekst. Men matematikkens helt specielle beskrivelseskraft, at de samme matematiske begreber kan anvendes robust i et utal af væsensforskellige virkeligheds-sammenhænge, beror på abstraktion - altså en frigørelse - fra denne kontekst. Dette sætter matematik i en læringsmæssig situation, der er særegen sammenlignet med andre fags forhold til deres (for)mål. Matematik har ikke et umiddelbart forhold til én konkret kontekst. Matematiktilegnelsen må gå gennem tre stadier. Tilegnelsen tager udgangspunkt i en forståelse af en *kontekst*, som den senere skal løsrives fra, kaldet *dekontekstualiseres* (Steinbring, 1994), for at den nødvendige abstraktion m.m. kan finde sted. Når tilegnelsen har fundet sted, kan dette matematiske produkt bringes i spil igen, fx i forbindelse med matematisk modellering. Dette vil vi kalde *rekontekstualisering*.

Denne nødvendige trefasede tilegnelse af matematikken betyder, at matematik er meget tættere skolebunden end mange andre fag. Mens de fleste andre fag kunne 'eksistere' uden deres skoletilknytning i kraft af deres mere direkte konteksttilknytning, er skolens betydning for, at matematiks potentiale kan realiseres, fundamental.

Den politiske aftaletekst kan indordnes under overskrifterne

- (matematikfaglige) færdigheder,
- (matematik i) anvendelse og tværfaglighed,
- (matematik)overgange i uddannelserne fra grundskole til videregående uddannelse,
- (matematikfaglige) prøveformer,
- (matematik)didaktik.

Det er en integreret del af aftaleteksten, at digitale teknologier skal spille en afgørende rolle i alle disse sammenhænge.

I sit arbejde har kommissionen udlagt disse pinde i overensstemmelse med ovenstående trefasede model for matematiktilegnelse.

Kommissionen har arbejdet med en række begreber, som beskrives og bruges i det følgende.

Grundlæggende matematiske færdigheder omtales i kommissionsrapporten som *basale færdigheder*. Herved forstås den omgang med matematiske metoder og begreber i matematiks særegne nomenklatur og syntaks, som sikrer, at fagets *robuste grundlag* på ethvert niveau inden for et givet emne til enhver tid modvares af *robust omgang* med grundlaget (se endvidere afsnit 12.4.1). Uden basale færdigheder er der ingen vedvarende matematikforståelse. Basale fær-

digheder er derfor også afgørende for begge overgangene, fra folkeskole til gymnasium og fra gymnasium til videregående uddannelser.

Tværfaglighed og anvendelse adresseres i rapporten ved begrebet *samspil*. Kommissionens behandling sker ud fra den synsvinkel, at der er tale om gensidighed ud fra i udgangspunktet separate fagligheder. Dette er helt i overensstemmelse med moderne opfattelse i professionelle sammenhænge. Det betyder, at tværfaglighed ikke er en særlig slags faglighed, og at anvendelse er baseret på *dialog* i modsætning til en 'rekvirent-leverandør' forståelse. En sådan dialog kommer ikke af sig selv, men udspringer af et godt fagsocialt miljø, som nødvendigvis skal være til stede og må etableres, hvor det ikke allerede findes.

Overgange kan beskrives tilsvarende ved *samarbejde*. De nuværende overgangsproblemer kan kun løses ved udstrakt samarbejde mellem grundskole–gymnasium og gymnasium–videregående uddannelse. Det er helt afgørende, at eleverne får erkendelsen af, at matematik er ét fag, som opbygges og udøves kumulativt gennem det samlede uddannelsesforløb - fra indskoling til ph.d.-studiet. KOM-rapporten (Niss & Jensen, 2002) har givet et sprog til samtalen *på langs*, og styredokumenter (Fælles Mål, gymnasiets læreplaner mv.) viser god overensstemmelse mellem leverandør og rekvirent, men igen er en rekvirent-leverandør forståelse for simpel til problemets løsning - ellers ville det antageligt også allerede være løst.

Digitale teknologiers indflydelse på undervisningen repræsenterer vilkår og muligheder, som matematik deler med andre fag. De tilbyder både medier og miljøer for undervisningen. Et stort internationalt studie (OECD, 2015)) anfører "... The results also show no appreciable improvements in student achievement in reading, mathematics or science in the countries that had invested heavily in ICT for education". Det handler ikke om hvor meget, men om hvordan digitale teknologier benyttes (Drijvers, 2015). Danmark er i (OECD, 2015) placeret som nummer to m.h.t. investering i ICT, kun overgået af Australien. Computer Algebra Systems, de matematiske værktøjsprogrammer, der fx kan bearbejde symboludtryk og håndtere grafiske fremstillinger af variabelsammenhænge i bred forstand, herefter CAS, indtager imidlertid for matematik en særstilling blandt de digitale teknologier: CAS er *entydigt matematisk*, og CAS *transformerer faget*. Der er ikke blot tale om en tilføjelse af en ekstra teknik til det traditionelle fag. "Matematik uden CAS" og "matematik med CAS" er to væsensforskellige faglige tilgange og læringssituationer. Kommissionen vurderer, at øvrige digitale teknologiers betydning for matematik er sekundær i forhold til CAS's. Rapporten har derfor fokus på CAS. Kommissionen lægger til grund, at matematik i de gymnasiale uddannelser er et fag, hvori CAS bør indgå i en konstruktiv vekselvirkning med ikke-digitale tilgange til indlæring, konsolidering og udvikling af matematiske færdigheder og kompetencer.

Prøveformer er i kommissionsrapporten at opfatte som udformning af *summativ* evaluering, dvs. rettet mod elevers demonstration af målopfyldelse efter afsluttede undervisningsforløb. Prøveresultatet kan her opfattes som dels en deklaration, dels en certificering af elevernes præstationer. I sine anbefalinger har kommissionen lagt vægt på, at prøverne ikke blot er en kontrol af elevernes udbytte af undervisningen, og at undervisningen ikke blot skal være en konsekvens af prøverne. Forholdet bør derimod være, at prøverne fokuserer produktionen af læring - altså undervisningen, og at undervisningen udfoldes ved prøverne, som derved hver for sig bliver kulminationer. Endvidere lægger kommissionen stor vægt på *formativ* evaluering, dvs. faglig feedback, som er rettet mod processen, der skal føre til opfyldelsen af læringsmålene.

Matematikdidaktik optræder i kommissorieteksten som *pædagogik* uden matematik-prædikat. Dette kan læses som om en passende opgradering af matematiklæreres kompetencer m.h.t. generelle principper for læringspsykologi og undervisningstilrettelæggelse vil sikre

et tilfredsstillende læringsudbytte. En sådan opgradering er uden tvivl nyttig, men tilgodeser ikke matematiks særlige læringsstatus som beskrevet ovenfor. Den retter sig snarere mod gymnasieinstitutionen generelt. Kommissionens syn på didaktik er derfor *fagdidaktisk*, dvs. knyttet til læringsvilkår som er eksplicit matematikfunderede. Dette indbefatter også generelle skolevilkår, som eksponeres særligt i matematik, så som overgang fra folkeskolen, kønsspecifikke forhold mv. (Ebbensgaard et al, 2014), (Bacher-Jensen et al., 2011), (EVA, 2015a), (EVA, 2015b).

Matematiks særlige læringsstatus bevidnes ved, at matematikdidaktisk forskning sammenlignet med anden fagdidaktik er i særklasse, hvad angår omfang, emnerigdom og facettering. Det er en meget stor gruppe af elever i det danske uddannelsessystem, der skal lære matematik, så kravene til matematiklærerens didaktiske beredskab er ekstraordinære. Der er derfor ingen snuptagssvar på matematikudfordringerne i uddannelsessystemet. De er fagligt iboende og viser sig ikke kun i Danmark, men internationalt. Det er kommissionens overbevisning, at matematiklærere som professionsstand skal opfattes som en stor resurse - og ikke som et efterslæb, der blot skal forbedres - med hensyn til den udbygning af faglige og didaktiske kompetencer, som samfundets udvikling fordrer.

Kommissoriet for matematikkommissionen adresserer således et særdeles omfattende problemkompleks. For at bringe klarhed over dette anbefaler kommissionen en tydeliggørelse af følgende tre komponenter og relationerne mellem disse (jf. de tre tema-bullits i forordet): **Grundlæggende matematiske færdigheder**, som sikrer det tekniske grundlag for udøvelse og forståelse af matematisk arbejde. Denne form for matematisk arbejde finder sted på tværs og på langs. Matematisk arbejde på tværs (transversalt) handler om matematiske processer i forhold til 'virkeligheden'. Matematisk arbejde på langs (longitudinalt) handler om matematik-interne forhold, dvs. de matematiske processer, som kan give faget sammenhængskraft og kumulativ opbygning fra de første trin til videregående uddannelse, og som kan sikre sammenhæng i overgang mellem uddannelsesstrin. For en nærmere beskrivelse, se afsnit 12.4.3. Uden det longitudinale matematiske arbejde vil faget fremstå som en uordnet værktøjskasse, der kun kan anvendes i nøje specificerede situationer. Matematik som fag og uddannelse har altid involveret disse tre komponenter mere eller mindre implicit. Det er kommissionens overbevisning, at et eksplicit fokus på grundlæggende matematiske færdigheder, matematik på tværs og matematik på langs som et gennemgående designprincip og aktivitet i undervisningen både vil skabe klarhed i opbygningen af matematikuddannelserne og tydelighed om deres forskellige målsætninger.

Kommissoriet for matematikkommissionen findes i bilag 1.

Med udgangspunkt i ovenstående og kommissoriet har kommissionen i sit arbejde fokuseret på følgende:

1. Niveauerne A-, B- og C skal være tydelige for lærere og elever
2. Mindstekrav og basale færdigheder
3. Matematik i grundforløbet
4. Det faglige indhold
5. Matematik og digitale teknologier (CAS)
6. Styrket samspil med studieretningens centrale fag
7. Nye prøveformer
8. Barrierer ved overgange i uddannelsessystemet skal reduceres
9. Lærernes didaktiske og pædagogiske kompetencer skal styrkes

Kommissionens væsentligste anbefalinger er samlet i kapitel 2.

Hvert af de efterfølgende kapitler indledes med en kort præsentation af de væsentligste af kommissionens anbefalinger inden for afsnittets tema efterfulgt af en beskrivelse af baggrund og problem samt et afsnit med kommissionens løsningsforslag.

2 Kommissionens centrale anbefalinger

Niveauerne A-, B- og C skal være tydelige for lærere og elever

- Den nuværende beskrivelse af A- og B-niveauerne revideres med en beskrivelse af den vægt, der lægges på matematisk arbejde på tværs og matematisk arbejde på langs på hvert af niveauerne. Beskrivelsen skal fremgå af læreplanernes afsnit om formål
- Gennem eksempler i grundforløbet skal niveauerne tydeliggøres for eleverne

Mindstekrav og basale færdigheder

- Der skal formuleres mindstekrav på alle niveauer
- Mindstekrav skal som hovedregel testes i de centralt stillede skriftlige prøver og i interne prøver
- Der skal stilles særlige opgaver ved skriftlige prøver, som tester mindstekrav
- Honorering af alle mindstekrav i disse opgaver skal sikre en karakter på mindst 02
- Mindstekravene til matematik skal fremhæves i læreplanerne, således at lærerne får mulighed for at tydeliggøre mindstekravene over for eleverne
- Det skal sikres, at basale færdigheder bliver vedligeholdt

Matematik i grundforløbet

- Lineære modeller bliver et fælles emne for grundforløbenes matematikundervisning
- I løbet af grundforløbet skal eleverne gøres bekendt med det forskellige sigte med hver enkelt af fagets niveauer (C, B, A)
- Der skal centralt formuleres klare retningslinjer for den skriftlige screenings indhold og form, og der skal løbende centralt udarbejdes vejledende eksempler på screeninger, der er tilpasset de forskellige uddannelser
- Den skriftlige screening skal afvikles i den afsluttende del af grundforløbet

Det faglige indhold

- For at få plads til nye emner og for at kunne stille krav om en mere dybtgående behandling af alle emner reduceres antallet af faglige emner væsentligt på B-niveau
- Der skal være en tydelig fællesmængde i emnerne på samme niveau for alle uddannelser
- Diskret matematik og sandsynlighedsteori kan indføres som nye emner på A- og B-niveau, såfremt dette kan gøres uden at introducere ny stoftrængsel
- I læreplanerne skal der være fokus på læsning af matematiske tekster
- Det matematiske ræsonnement skal spille en større rolle på alle tre niveauer

Matematik og digitale teknologier (CAS)

- Der er enighed i kommissionen om, at måden, CAS er blevet inddraget på, har haft negativ effekt på elevernes udvikling og besiddelse af basale færdigheder, og kommissionen finder det afgørende for, at CAS's potentiale kan udnyttes, at der gennemføres initiativer, som imødegår dette
- Undervisningen skal baseres på en klar holdning til og bevidsthed om, hvordan CAS og andre digitale teknologier inddrages fagligt og didaktisk. Læreplanerne og undervisningsvejledningerne skal understøtte en hensigtsmæssig udnyttelse af de didaktiske muligheder, som de digitale teknologier giver
- En del af de opgaver, der stilles ved de skriftlige prøver skal kræve matematisk indsigtfuld brug af CAS og tilhørende kritisk stillingtagen til de opnåede resultater

-
- CAS skal inddrages ved de mundtlige prøver blandt andet til støtte for afprøvning i undersøgelsesbaserede ræsonnementer fx i samspil med andre fag

Styrket samspil med studieretningens centrale fag

- Samspil med matematik skal fremgå af læreplanerne i studieretningernes centrale fag
- Kernestof og supplerende stof i matematik knyttet til fagligt samspil skal evalueres ved prøverne i matematik, herunder de skriftlige prøver og projektpøverne

Nye prøveformer

- Kommissionens principper for nye prøveformer er, at prøverne skal
 - afprøve mindstekrav
 - afprøve samspil med studieretningens centrale fag
 - afspejle undervisningens arbejdsformer
 - bringe KOM-rapportens kompetencer i spil, herunder have fokus på matematiske ræsonnementer og læsning af matematiske tekster
- Kommissionen anbefaler herudover, at følgende elementer kan indgå i prøverne
 - Der kan indgå et centralt udarbejdet forberedelsesmateriale
 - Mundtlige prøver på B-niveau kan indledes med en gruppedel særligt med henblik på at få fokus på det anvendelsesorienterede
 - Ved skriftlige delprøver med begrænsede hjælpemidler bør der være adgang til en formelsamling
- Kommissionen foreslår, at der også fremadrettet igangsættes forsøgs- og udviklingsarbejde med nye prøveformer

Barrierer ved overgange i uddannelsessystemet skal reduceres

- Der skal lokalt skabes rum til samarbejde mellem lærerne i grundskolen og de gymnasiale uddannelser, fx gennem aktiviteter, som de, der allerede i dag gennemføres nogle steder. En tilsvarende fremgangsmåde kan anvendes fra gymnasial uddannelse til videregående uddannelse

Lærernes didaktiske og pædagogiske kompetencer skal styrkes

- Indholdet i pædagogikumuddannelsen justeres, så det tager højde for de erkendte problemstillinger, som flere undersøgelser af matematikfaget i gymnasiet har afdækket, fx elevernes store faglige spredning, manglende motivation og arbejdsindsats, tidspres og fagligt samspil. Disse problemstillinger skal også være gennemgående temaer i erfarne læreres efteruddannelsesaktiviteter
- I uddannelsen, der sikrer faglig kompetence til matematikundervisning i gymnasiet, eller som en overbygning på denne uddannelse, bør der være et praksisorienteret element, der sigter direkte mod professionen som matematiklærer i de gymnasiale uddannelser
- Kommissionen anbefaler, at der igangsættes et udviklingsarbejde med fokus på betydningen af vidensmotivation for at lære matematik.

3 Tydelige niveauer: C-, B- og A-niveauernes profil

Centrale anbefalinger

- Den nuværende beskrivelse af A- og B-niveauerne revideres med en beskrivelse af den vægt, der lægges på matematisk arbejde på tværs og matematisk arbejde på langs på hvert af niveauerne. Beskrivelsen skal fremgå af læreplanernes afsnit om formål
- Gennem eksempler i grundforløbet skal niveauerne tydeliggøres for eleverne

Baggrund

I kommissoriet lægges der vægt på, at sigtet med hvert enkelt matematikniveau skal være tydeligt for lærere og elever. Læreplanernes mål- og indholdsbeskrivelser skal være i overensstemmelse med formålet med det pågældende fagniveau, herunder skal der være sammenhæng og progression mellem fagniveauerne, så det bliver muligt at opgradere fra ét niveau til det næste på et år.

I hf, stx, hhx og htx er niveauerne i dag beskrevet ved forskellige profiler:

C-niveauet (findes ikke på htx) er almindennende. Det skal give alle elever bedre muligheder for at forstå og forholde sig til problemstillinger fra omverdenen, i andre fag, fra samfundsdebat eller privatliv.

B-niveauet har hovedvægt på modellering og anvendelser af matematik både med sigte på fagligt samspil i gymnasiet og på at opnå kompetencer til at kunne gennemføre videregående uddannelser, hvor matematik indgår.

A-niveauet giver eleverne muligheder for at opnå kompetencer til at kunne gennemføre længerevarende matematikholdige uddannelser via den måde, hvorpå der arbejdes med modellering og problembehandling samt med matematisk teori og metode.

Kort kan C-niveauet karakteriseres som 'borgermatematik' og B-niveauet som 'det anvendelsesorienterede', mens A-niveauet er det 'teoretiske'. Denne profilering blev især sat på dagsordenen med 2003-reformen, hvor alle elever i stx og hhx fik matematik på mindst C-niveau.

For alle niveauer er dannelsesaspektet af matematik væsentligt. Ved dette forstås, at matematisk betragtning har afgørende betydning for beskrivelse og forståelse af og kommunikation om mellemmenneskelige fælles vilkår.

Problem

Kommissionen har konstateret, at de nuværende beskrivelser af formålet i læreplanerne stort set er identiske på tværs af niveauer inden for den enkelte uddannelse, men forskellige på tværs af uddannelser. Niveauernes forskellighed fremstår således ikke tydeligt.

Løsning

Kommissionen finder den nuværende karakteristik af niveauerne – "borgermatematik", "det anvendelsesorienterede" og "det teoretiske" utilstrækkelig, idet den bl.a. signalerer en rangordning, hvor det teoretiske står over det anvendelsesorienterede. Betegnelsen "borgermatematik" er dækkende for C-niveauet, der bl.a. har som formål at uddanne borgerne til at kunne begå sig i et demokratisk samfund.

For alle niveauer gælder det, at der skal arbejdes med faget ud fra både et udadrettet og anvendelsesorienteret synspunkt (matematisk arbejde på tværs) og et mere internt matematik-

fagligt synspunkt (matematisk arbejde på langs), der skal sikre overlevering af blandt andet basale færdigheder og begreber.

Beskrivelsen af A- og B-niveauerne i læreplanerne skal derfor revideres, så B-niveauet er karakteriseret ved at vægte dimensionen på tværs højere end dimensionen på langs, hvor det omvendte er tilfældet for A-niveauet. Heri ligger bl.a. en opgave med at beskrive det kumulative i læreplanerne, uden at det lægger for stramme bånd på lærernes tilrettelæggelse af undervisningen.

Kommissionen anbefaler, at den nuværende beskrivelse af A- og B-niveauerne revideres med henblik på en tydeliggørelse af den vægt, der lægges på matematisk arbejde på tværs og matematisk arbejde på langs på hvert af niveauerne. Dette skal fremgå af læreplanernes afsnit om formål.

Niveauerne skal derudover tydeliggøres for eleverne. Dette kan, jf. afsnit 5 ske gennem kommissionens anbefaling vedrørende matematik i grundforløbet.

4 Mindstekrav og basale færdigheder

Centrale anbefalinger

- Der skal formuleres mindstekrav på alle niveauer
- Mindstekrav skal som hovedregel testes i de centralt stillede skriftlige prøver og i interne prøver
- Der skal stilles særlige opgaver ved skriftlige prøver, som tester mindstekrav
- Honorering af alle mindstekrav i disse opgaver skal sikre en karakter på mindst 02
- Mindstekravene til matematik skal fremhæves i læreplanerne, således at lærerne får mulighed for at tydeliggøre mindstekravene over for eleverne
- Det skal sikres, at basale færdigheder bliver vedligeholdt

Baggrund

Flere videregående uddannelser udtrykker bekymring over de studerendes mangel på basale matematiske færdigheder (jf. Færdighedsrapporten (Hansen et al, 2011)). Det samme er tilfældet i de gymnasiale uddannelser i forhold til de basale færdigheder, eleverne har med fra grundskolen. For en nærmere beskrivelse af Kommissionens brug af begreberne 'mindstekrav' og 'basale færdigheder', se afsnit 12.4.2.

Problem

Manglende basale færdigheder gør det vanskeligt for eleverne og de studerende at følge med i gennemgang af nyt stof, at læse matematiske tekster, og at løse matematiske problemer.

Igennem tiden har der været gennemført forskellige initiativer for at styrke elevernes og de studerendes basale færdigheder. Det er hensigten, at implementeringen af Fælles Mål i grundskolen – på længere sigt – vil øge elevernes basale færdighedsberedskab, når de forlader grundskolen.

Ønsket om at styrke gymnasieelevernes basale færdigheder var baggrunden for, at der i stx i 1997 blev indført to-delte prøver, hvor første del er uden hjælpemidler.

Løsning

Kommissionen har drøftet, hvordan de basale færdigheder kan styrkes, og hvordan der kan sættes fokus på mindstekrav. Kommissionen finder det afgørende, at de basale færdigheder og mindstekravene testes ved de afsluttende prøver, og at de indgår løbende i evalueringen af den enkelte elev. Kommissionen peger på, at basale færdigheder sammen med mindstekrav er afgørende i matematikgrundlaget på ethvert niveau, for ethvert tema og til enhver tid. Færdighederne skal vedligeholdes og opgraderes. Nye kommer til, mens andre kan miste deres relative betydning. Derfor er det vigtigt, at der er fokus på basale færdigheder med og uden CAS gennem hele uddannelsesforløbet.

Kommissionen anbefaler, at der formuleres mindstekrav på alle niveauer, og at mindstekrav som hovedregel testes i de skriftlige prøver og i interne prøver.

Kommissionen anbefaler, at der ved skriftlige prøver stilles særlige opgaver, som tester mindstekrav. Honorering af alle de mindstekrav, der bringes i spil ved disse særlige opgaver skal sikre en karakter på mindst 02.

Kommissionen anbefaler, at mindstekravene til matematik fremhæves i læreplanerne, så det er klart for eleverne, at der er nogle uomgængelige dele af faget, som man skal beherske. De

ovenfor omtalte hensyn vedrørende mindstekrav skal tilsvarende komme tydeligt til udtryk ved de skriftlige prøver, fx gennem organiseringen af de stillede opgaver, så det er klart for eleverne, hvad der skal til for at bestå de skriftlige prøver i matematik. Kommissionen anbefaler i sammenhæng hermed, at institutionerne i den løbende, formative evaluering i matematikundervisningen benytter hyppige tests, fx multiple-choice test, der undervejs i undervisningsforløbet kan være med til at tydeliggøre for eleverne, hvor de fagligt befinder sig i forhold til de ovenfor nævnte mindstekrav.

For at understøtte arbejdet med mindstekrav foreslår kommissionen, at der etableres en central database med egnede opgaver, som lærere og elever kan benytte i undervisningen. Dette giver læreren mulighed for løbende at give fokuseret feedback til den enkelte elev. Basen kan fx etableres ved hjælp af 'crowd-funding', hvor lærere indsender opgaveforslag i et fastlagt format sammen med en klassifikation af, hvad opgaven tester. For at sikre ensartethed i klassifikationen og kvaliteten af opgaverne, vil det være nødvendigt, at de indsendte opgaveforslag gennemgås af en redaktion. Etablering og vedligeholdelse af databasen, herunder løbende kvalitetssikring, vil derfor kræve tilførsel af økonomiske ressourcer.

Som rapporten (Bundsgaard og Puck, 2016) påviser, har de nationale test i folkeskolen ført til udstrakt 'teaching-to-the-test', som lærerne oplever som noget, der flytter deres fag i en uheldig retning. Nationale test er udformet efter benchmark-principper med en detaljeret måling af præstationer fra 'de ringeste' til 'de bedste'. Hvad der er 'ringest' og hvad der er 'bedst', er fastlagt ved selve testens udformning. Teaching-to-the-test betyder i denne sammenhæng, at undervisningen fokuserer på høj test-score i stedet for dybere læring. Testene selv bliver pensum. Sigtet med 'mindstekrav' er imidlertid ikke 'høj score'. De tjener først og fremmest til tydeliggørelse af mindstemål for det matematikfaglige grundlag på et givet niveau. Det kan opfattes som en matematikfaglig udmøntning af karakterbekendtgørelsens beskrivelse af karakteren 02. Kommissionen finder derfor, at introduktionen af mindstekrav er i god overensstemmelse med dybere læring. Hertil kommer, at en central opgavebank tilvejebragt gennem crowd-funding-princippet vil afspejle lærernes vurdering, således at mindstekrav vanskeligt kan opleves som 'noget der flytter deres fag i en uheldig retning'.

5 Matematik i grundforløbet på de 3-årige gymnasiale uddannelser

Centrale anbefalinger

- Lineære modeller bliver et fælles emne for grundforløbenes matematikundervisning
- I løbet af grundforløbet skal eleverne gøres bekendt med det forskellige sigte med hver enkelt af fagets niveauer (C, B, A)
- Der skal centralt formuleres klare retningslinjer for den skriftlige screenings indhold og form, og der skal løbende centralt udarbejdes vejledende eksempler på screeninger, der er tilpasset de forskellige uddannelser
- Den skriftlige screening skal afvikles i den afsluttende del af grundforløbet

Baggrund

På de treårige gymnasiale uddannelser påbegynder eleverne et særligt grundforløb, før de vælger studieretning. Grundforløbet afsluttes primo november.

Der findes ikke et tilsvarende kort grundforløb på hf.

For at understøtte elevernes valg af studieretning skal grundforløbet introducere eleverne til studieretningernes fagområder og fag samt de typer videregående uddannelser, som den enkelte studieretning er målrettet mod. Grundforløbet skal samtidig udfordre eleverne fagligt, så eleverne med det samme møder de faglige krav, der stilles i gymnasiet.

Grundforløbet skal blandt andet bestå af undervisning i dansk, engelsk, matematik og samfundsfag samt i nogle af de studieretningsfag, som institutionen udbyder, således at eleven introduceres til studieretningernes fagområder, gerne med blik mod de videregående uddannelser, som den enkelte studieretning er målrettet, men med hovedvægten lagt på valg af studieretning.

Gymnasiets matematikundervisning udgør for de fleste elever et paradigmeskift, hvoraf nogle af de væsentligste aspekter er

- fra en intuitiv og induktiv til en formel og definatorisk forståelse af matematiske begreber.
- fra et resultat-fokus med ad hoc beregninger til et metode-fokus med strategier og anvendelse af sætninger og formler.
- fra beskrivende og forklarende til ræsonnerende og begrundende matematiktekster, skriftlige såvel som mundtlige
- fra narrativ tilgang i grundskolen til tekster som ikke direkte appellerer til situationer

Problem

Kravet om, at grundforløbet skal udfordre eleverne fagligt, så de med det samme møder de faglige krav, der stilles i gymnasiet, stiller særlige krav til tilrettelæggelsen af matematikundervisningen i de første tre måneder.

Undervisningen i matematik i grundforløbet

- skal give eleverne mulighed for at træffe et kvalificeret valg af studieretning, herunder valg af matematikniveau (C, B, A)
- skal give læreren indsigt i elevernes faglige forudsætninger og udviklingspotentialer og hermed danne baggrund for rådgivning af elevernes valg af studieretning

På den ene side skal undervisningen i grundforløbet derfor bygge videre på elevernes kendskab til matematik fra grundskolen, på den anden side skal eleverne på kort tid se nogle af de sider af matematikken, fx abstraktion og teoridannelse, der kendetegner faget på A-niveau, og som kan være meget langt fra elevernes hidtidige erfaringer med faget. Da et af elevernes hovedmotiver for at vælge A-niveau er efterfølgende uddannelse (Skjoldager, 2014), er det endvidere vigtigt, at eleverne i grundforløbet orienteres om de videregående uddannelsers krav om matematikniveau.

Løsning

Det faglige indhold i matematikundervisningen i grundforløbet skal tænkes sammen med de flerfaglige forløb, henholdsvis naturvidenskabeligt grundforløb (NV) i stx og htx og økonomisk grundforløb (ØK) i hhx. Dette giver visse bindinger på, hvilke faglige emner der kan inddrages.

I NV arbejdes der i dag på stx typisk med lineære variabelsammenhænge og omskrivning af simple formeludtryk samt simpel deskriptiv statistik. I det nye ØK vil privatøkonomi være et naturligt emnevalg, som vil indebære inddragelse af f.eks. lineære variabelsammenhænge, procentregning og statistik i matematik. Alle de nævnte emner bygger videre på den matematik, som eleverne har med sig fra grundskolen. Naturligt nok arbejder eleverne i grundskolen typisk meget konkret med emnerne, hvorfor mange elever ofte har vanskeligt ved at genkende emnerne i en gymnasial sammenhæng, hvor der er mindre fokus på konkret kontekst og langt mere på generaliseringer og abstraktion (Ebbensgaard et al, 2014).

Kommissionen anbefaler, at undervisningen i grundforløbet eksplicit bygger videre på elevernes kendskab til matematik fra grundskolen med henblik på præcisering og videreudvikling af allerede kendte matematiske begreber. Det anbefales endvidere, at undervisningen tilrettelægges med fokus på en undersøgende tilgang, således at eleverne i videst muligt omfang kan gøre brug af den tilgang, de kender fra folkeskolen. Dette sker ved, at eleverne undersøger deres matematikbagage fra grundskolen, men fra et gymnasialt stade, dels rettet ind i faget selv, og dels rettet ud af faget mod andre relevante fag. Mere konkrete beskrivelser af hvordan det kan gennemføres kan findes i de respektive undervisningsvejledninger.

I grundforløbet kan konsolidering og opgradering af basale færdigheder som isolering i formel og reducere af algebraiske udtryk, systematisering af ligningsløsning samt enkle eksempler på logisk deduktivt ræsonnement ske inden for områder, hvor eleverne arbejder med den nye faglighed.

Kommissionen anbefaler, at den faglige behandling også skal foregå på et niveau, som ved den skriftlige screening kan danne baggrund for at afdække elevernes evner og motivation til at tilegne sig matematik på A-niveau.

Kommissionen anbefaler i tilknytning hertil, at der i grundforløbet, såvel som i det videre undervisningsforløb, i højere grad end i dag skal fokuseres på matematikkens begrebsbeskrivelse, nomenklatur, systematik og ræsonnement - herunder på forskelle og ligheder mellem grundskolens og de gymnasiale uddannelsers brug - samt faglig læsning.

Kommissionen anbefaler, at der skal tilstræbes et styrket samarbejde mellem faget matematik og naturvidenskabeligt grundforløb i stx og htx og tilsvarende, at der skal tilstræbes et styrket samarbejde mellem faget matematik og økonomisk grundforløb i hhx, og at dette udmøntes ved, at der sikres overensstemmelse mellem de relevante læreplaner.

Kommissionen anbefaler videre, at de tre-årige gymnasiale uddannelser i grundforløbet har en fælles matematikfaglig tilgang, som dog skal tones i forhold til den enkelte uddannelses profil, som den afspejles i de flerfaglige forløb.

Kommissionen peger set i lyset af ovenstående anbefalinger på lineære modeller som et fælles emne for grundforløbenes matematikundervisning. De er grundlæggende både matematikinternt og for samspil med andre fag på alle uddannelserne. De lineære modeller åbner op for, at eleverne kan have en eksperimenterende og undersøgende tilgang understøttet af de andre fag i grundforløbet, fx NV og ØK. Endvidere kan undervisningen tilrettelægges med henblik på at løfte andre emner til gymnasialt niveau.

Et centralt fastlagt emne for grundforløbenes matematikundervisning vil også lette overgangen for elever, der skifter skole eller gymnasial uddannelse umiddelbart efter grundforløbet.

Kommissionen understreger, at eleverne i løbet af grundforløbet skal gøres bekendt med det forskellige sigte med hvert enkelt af fagets niveauer (C, B, A).

Ifølge den politiske aftale af 3. juni 2016 skal eleverne i løbet af grundforløbet gennemføre en skriftlig screening i matematik. Resultatet af screeningen skal kunne anvendes i forbindelse med den obligatoriske evalueringssamtale, som eleven skal til ved afslutningen af grundforløbet med henblik på valg af studieretning. Resultatet af screeningen tæller ikke med i det samlede eksamensresultat.

Kommissionen anbefaler, at der fastsættes klare centrale retningslinjer for screeningens indhold og form, så der sikres en ensartet national standard. Kommissionen anbefaler i sammenhæng hermed, at der løbende udarbejdes centrale vejledende eksempler på screeninger, der er tilpasset de forskellige uddannelser, og som kan benyttes af institutionerne.

Kommissionen understreger i forbindelse med screeningen, at det er vigtigt, at screeningen har fokus på at afdække elevernes evner og motivation for at tilegne sig matematik. Dette betyder, at screeningen først og fremmest skal evaluere elevernes læringsudbytte i grundforløbet. Det er ikke hensigten at gentage grundskolens afgangsprøve, men elevernes matematiske beredskab fra grundskolen vil naturligt komme til udtryk i elevernes besvarelse af opgaverne i screeningen.

Endelig anbefaler kommissionen, at screeningen afvikles af institutionerne i den afsluttende del af grundforløbet.

I forhold til hf anbefaler kommissionen, at der tilrettelægges et kort introduktionsforløb til uddannelsens matematikfag og niveauer, hvor der bl.a. kan sættes fokus på de grundlæggende kompetencer, som eleverne efterfølgende får brug for.

6 Det faglige indhold

Centrale anbefalinger

- For at få plads til nye emner og for at kunne stille krav om en mere dybtgående behandling af alle emner reduceres antallet af faglige emner væsentligt på B-niveau
- Der skal være en tydelig fællesmængde i emnerne på samme niveau for alle uddannelser
- Diskret matematik og sandsynlighedsteori kan indføres som nye emner på A- og B-niveau, såfremt dette kan gøres uden at introducere ny stoftrængsel
- I læreplanerne skal der være fokus på læsning af matematiske tekster
- Det matematiske ræsonnement skal spille en større rolle på alle tre niveauer

Baggrund

For hvert niveau (A, B og C) og hver uddannelse (stx, hhx, htx og hf) er der fastlagt et pensum for matematikundervisningen ved læreplanens kernestof og supplerende stof. Hertil kommer de skriftlige eksamensopgaver, der også er med til at fastlægge pensum, samt udlægningen af krav i undervisningsvejledninger.

Problem

Kommissionen vurderer, at antallet af emner på B-niveau er for stort, og at dette fører til en overfladisk behandling af nogle emner og dermed blandt eleverne tilsvarende overfladisk matematisk indsigt i emnerne. Samtidigt gør de mange emner det for svært for eleverne at få overblik.

Stoftrængslen gør det derudover umuligt at få plads til nye emner. Endelig er der behov for at sætte fokus på matematisk ræsonnement.

At læse tekster med matematisk indhold kræver en særlig læsestrategi, som eleverne kun i begrænset omfang har med sig fra grundskolen, og som skal dyrkes som et synligt læringsmål i matematikundervisningen i gymnasiet (Stampe et al, 2012). Eksistensen og omfanget af problemet med læsning af matematisk tekst kaldes i Matematikudredningen (MBUL, 2015) for bemærkelsesværdig.

Løsning

Kommissionen anbefaler, at der reduceres væsentligt i antallet af emner på B-niveauet ved, at et eller flere sammenhængende emner bortfalder. Emnerne skal vælges således, at den faglige progression stadig sikres og således, at bortfaldet ikke forhindrer anden matematik i at blive velfunderet. Kommissionen anbefaler i sammenhæng hermed, at der stilles krav om en mere dybtgående behandling af det resterende faglige indhold med tydeligere fokus på den tværgående dimension og dimensionen på langs.

Kommissionen anbefaler, at der er en tydelig fællesmængde i de emner, der behandles på B-niveau i de forskellige gymnasiale uddannelser, men samtidig at der – som det er tilfældet i dag – gives plads til variation, så matematik på B-niveau kan tilpasses de enkelte uddannelsers særlige profiler.

Kommissionen anbefaler, at A- og B-niveauet opgraderes ved at inddrage emner og metoder med potentiale for samspil med andre fag. For at eksempelvis hypotesetest kan indbefatte matematiske kerneaktiviteter, skal det underbygges med tilstrækkelig sandsynlighedsteori til, at computersimulering og simple tests som binomialtest bliver velfunderede. Mere komplicerede tests kan så outsources som matematiske ikke-kerneaktiviteter, som stadig fuldt kan inddrages i samspilsfagets diskurs, se endvidere afsnit 12.4.4. Kommissionen anbefaler, at

sandsynlighedsteori og diskret matematik indføres som nye emner på A- og B-niveau, idet det sikres, at der ikke derved introduceres ny stoftrængsel.

Derudover anbefaler kommissionen, at der i læreplanerne er fokus på læsning af matematiske tekster.

På alle niveauer skal eleverne møde matematiske ræsonnementer som en del af de faginterne aktiviteter.

Matematisk ræsonnement er bl.a. kendetegnet ved

- at omhandle matematiske objekter (reserverede ord og definitioner)
- logisk deduktion
- at have retning: Fra præmis til konklusion

Det matematiske ræsonnement er en udfordring af flere grunde. For det første er det helt afgørende for matematik som fag. Hvis eleverne ikke erkender dette, opfatter de blot faget som en række adskilte, om end muligvis effektive, metoder. En sådan fagopfattelse gør det vanskeligt at opretholde progression i uddannelserne og er en væsentlig årsag til nogle af overgangsproblemerne (Gueudet, 2013).

For det andet er det matematiske ræsonnement uovertruffen til at stille skarpt på den almene men avancerede mentale kompetence at kunne skelne mellem 'at vide' (kognition) og 'at vide, hvad jeg ved' (metakognition). Det er vigtigt, at eleverne ser matematiske ræsonnementer i situationer, hvor et bevis kan gennemføres fuldt ud, ved at der bygges på accepterede forudsætninger. Eleverne skal forstå forskellen mellem et fuldført bevis, et "bevis", der bygger på uafklarede påstande, og egentlig "heuristiske ræsonnementer".

Resultater, der er problematiske eller umulige at bevise i gymnasiet, bør omtales på en måde, så eleverne kan blive nysgerrige efter at vide, hvorfor det tilsyneladende oplagte måske alligevel ikke er oplagt, også selv om denne nysgerrighed ikke nødvendigvis stilles. Således kunne beviset for integral- og differentialregningens hovedsætning behandles ved netop at påpege, hvad der ikke kan afgøres inden for gymnasiepensum.

Kommissionen understreger, at matematikken bygger på ræsonnementer, og kommissionen anbefaler derfor, at ræsonnementet får en mere fremtrædende plads i gymnasial matematik som det udfoldes i beviser, men ikke kun her. Det afgørende er erfaringer og fortrolighed med selve den kognitive aktivitet, der består i formuleringer af udsagn (fra præmis til konklusion) og efterfølgende logisk deduktion, således at matematik fremstår sammenhængende, kumulativt opbygget og på solid grund. Matematik i helhed som aksiomatisk hierarkisk struktur er her mindre væsentlig og behandles bedst under videnskabsteoretiske og -historiske aspekter af matematikundervisningen. Kommissionen peger i forlængelse heraf på nødvendigheden af, at der i undervisningen skabes klarhed for eleverne over, hvornår der bliver argumenteret i bund, og hvornår der er tale om et mere heuristisk argument, som kræver yderligere matematik at forstå til bunds.

Det matematiske ræsonnement skal indgå på alle niveauer men med forskellig vægt. Alle elever skal undervejs i uddannelsesforløbet have mødt eksempler på matematiske ræsonnementer, hvor der er argumenteret i bund. Det kan for eksempel ske ved at restringere domænet, eller ved at vælge eksempler, hvor der kan udføres en udtømmende gennemgang af mulighederne. Når eleverne har mødt udfoldede ræsonnementer på restringerede domæner, vil

der efterfølgende kunne arbejdes mere heuristisk i forhold til resultatet på udvidede domæner.

7 Matematik og digitale teknologier (CAS)

Centrale anbefalinger

- Der er enighed i kommissionen om, at måden, CAS er blevet inddraget på, har haft negativ effekt på elevernes udvikling og besiddelse af basale færdigheder, og kommissionen finder det afgørende for, at CAS's potentiale kan udnyttes, at der gennemføres initiativer, som imødegår dette
- Undervisningen skal baseres på en klar holdning til og bevidsthed om, hvordan CAS og andre digitale teknologier inddrages fagligt og didaktisk. Læreplanerne og undervisningsvejledningerne skal understøtte en hensigtsmæssig udnyttelse af de didaktiske muligheder, som de digitale teknologier giver.
- En del af de opgaver, der stilles ved de skriftlige prøver skal kræve matematisk indsigtfuld brug af CAS og tilhørende kritisk stillingtagen til de opnåede resultater.
- CAS skal inddrages ved de mundtlige prøver blandt andet til støtte for afprøvning i undersøgelsesbaserede ræsonnementer fx i samspil med andre fag.

Baggrund

Et CAS-program er i dag typisk computerbaseret, og det anvendes på B- og A-niveau i alle fire gymnasiale uddannelser. Omfanget af anvendelsen er ikke fastlagt centralt, men afhænger af det enkelte holds undervisningstilrettelæggelse. I 2005 blev CAS indført som "semi-obligatorisk" på disse niveauer, idet eksamensopgaverne på alle uddannelser blev stillet med udgangspunkt i, at eleverne råder over et CAS-værktøj. På hhx blev CAS indført i 2010. I årene efter 2005 anvendte elever (skoler) i stx dog CAS på lommeregner. En typisk "program-pakke" på skolerne i dag består af et CAS-program samt programmer (applikationer), der blandt andet kan håndtere statistiske simuleringer og dynamisk geometri.

C-niveauet på hf er i den nuværende ordning det eneste matematikforløb, hvor eleverne ikke forudsættes at kunne bruge CAS.

CAS indgår i alle tre aspekter: grundlæggende basale færdigheder, matematisk arbejde på tværs og matematisk arbejde på langs.

CAS gør det let at inddrage og skifte mellem repræsentationsformer (som fx grafiske og symbolske), hvilket blandt andet kan bidrage til at åbne faget og motivere nogle af de elever, der har vanskeligt ved håndtering af symbolske udtryk, til at give sig i kast med faget. Desuden giver CAS gode muligheder for at inddrage mere komplekse og virkelighedsnære problemer, der ellers ikke ville kunne behandles lige så effektivt i undervisningen, men som også kan spille en rolle som motivationsfaktor. Blandt andet i sådanne situationer outsources selve problemløsningen typisk til CAS, se endvidere afsnit 12.4.4.

Problem

Inddragelsen af CAS har haft stærkt negativ indvirkning på elevernes udvikling og besiddelse af basale færdigheder, jf. Matematikudredningen (MBUL, 2015).

Udviklingen i it og digitale værktøjer i undervisningen indebærer en risiko for at trivialisere den faglighed, som eleverne skal mobilisere for at løse opgaver, mest grelt i form af skabeloner som produceres i undervisningen eller blot erhverves udefra, og som leverer færdige fuldstændige besvarelser på baggrund af simple input. Dette giver store udfordringer med at sikre, at opgaverne, der stilles ved de skriftlige prøver i matematik, i deres nuværende form er egnede til at vurdere graden af målopfyldelse. et forhold som er et af hovedpunkterne i Ma-

tematikudredningen. Bestræbelserne på at undgå trivialisering af (eksamens)opgaveløsning må ikke stå i vejen for at udnytte, at de digitale værktøjsprogrammer øger matematiks rækkevidde og dybde betragteligt.

Løsning

Der er enighed i kommissionen om, at måden, CAS er blevet inddraget på, har haft negativ effekt på elevernes udvikling og besiddelse af basale færdigheder, og kommissionen finder det afgørende for, at CAS's potentiale kan udnyttes, at der gennemføres initiativer, som imødegår dette.

Kommissionen finder endvidere, at CAS har et stort didaktisk potentiale.

De mange måder, CAS kan indgå på, gør det nødvendigt, at der er en klar holdning til og bevidsthed om, hvordan instrumenterede teknikker indgår i undervisningen. CAS optræder på to principielt forskellige måder: I nogle sammenhænge giver man afkald på kontrol af, hvad CAS-værktøjet leverer, fx i en såkaldt 'black box', og i andre sammenhænge indgår CAS-værktøjet som en del af kerneaktiviteterne, herunder både til begrebsindlæring og til problemløsning i faget. Kommissionen anbefaler derfor, at tilrettelæggelse af undervisning baseres på en tydelig afgrænsning af, hvornår CAS anvendes på den ene eller den anden måde. Dette kræver en klar holdning til, hvornår det er fagligt og didaktisk relevant at inddrage CAS, således at CAS bliver til en kapacitetsudvidelse frem for at trivialisere elevernes omgang med matematik, altså således at eleverne udviser refleksiv og kritisk omgang med CAS.

Kommissionen anbefaler, at man i gymnasiets matematikundervisning bygger videre på elevernes brug af CAS i grundskolen. I Fælles Mål er der krav om, at eleverne skal anvende værktøjsprogrammer, der omfatter dynamisk geometri og CAS. Desuden møder eleverne i grundskolen regneark. Brugen af regneark anser kommissionen som et godt udgangspunkt for at gå fra konkrete beregninger til behandling af generaliserende algebraiske udtryk.

De fleste CAS-programmer er, ud over at være matematiske værktøjer, også tekstbehandlingsprogrammer. Som tilfældet er med CAS som matematisk værktøj, er der også her tale om et tve-ægget sværd. Forkert anvendt kan det svække elevernes skrivekompetencer, fx så de ikke kan skrive meningsfuldt i andre medier. Rigtigt anvendt kan det styrke samme, fx ved at indstille programmet til at tydeliggøre forskellen på matematisk (typisk symbolmanipulation) og metamatematisk tekst. Kommissionen påpeger også her vigtigheden af i undervisningen og i udformningen af eksamen nøje at overveje, hvad der skal overlades til CAS, og hvad der skal behandles uden CAS.

Kommissionen anbefaler derfor, at læreplanerne og undervisningsvejledningerne skal udformes således, at de understøtter en hensigtsmæssig udnyttelse af de didaktiske muligheder, som de digitale teknologier giver.

I forhold til prøverne anbefaler kommissionen, at en del af de opgaver, der stilles ved de skriftlige prøver, tager udgangspunkt i den forudgående træning af elevens indsigtsfulde brug af CAS, og at CAS inddrages ved de mundtlige prøver, blandt andet til at støtte afprøvning i undersøgelsesbaserede ræsonnementer fx i samspil med andre fag.

8 Styret samspil med studieretningens centrale fag

Centrale anbefalinger

- Samspil med matematik skal fremgå af læreplanerne i studieretningernes centrale fag
- Kernestof og supplerende stof i matematik knyttet til fagligt samspil skal evalueres ved prøverne i matematik, herunder de skriftlige prøver og projektprøverne

Baggrund

Af den politiske aftale om styrkede gymnasiale uddannelser af 3. juni 2016 fremgår et krav om, at dele af kernestof og/eller supplerende stof i matematik skal uddybe og strukturere kernestoffet i studieretningens centrale fag. Kommissionen udtrykker sin tilslutning hertil. Ved et styrket samspil med et studieretningsfag får matematik mulighed for reelt autentiske bidrag inden for fagområder, som eleverne qua deres studieretningsvalg må formodes at interessere sig for. Derudover giver styrket samspil mulighed for at trække på det andet fags bidrag med sagsforhold, som har inspireret til matematiske begreber, og som funderer dem i elevernes præmatematiske begrebsverden. Der er solid didaktisk erfaring for, at dette både er motiverende og understøttende for elevernes læring, se fx (Michelsen og Iversen, 2009).

Med de fremtidige studieretninger er fagligt samspil mellem matematik på A-niveau og følgende centrale studieretningsfag aktuelt:

STX	Fysik, kemi, bioteknologi, geovidenskab, biologi, samfundsfag og musik
HHX	Virksomhedsøkonomi, international økonomi, afsætning og sprogfagene
HTX	Bioteknologi, fysik, kemi, geovidenskab, biologi, informatik, programmering, teknologi, kommunikation og it samt sprogfagene

Fagligt samspil er aktuelt mellem matematik på B-niveau og følgende centrale studieretningsfag:

STX	Biologi, samfundsfag, musik og sprogfagene
HHX	Virksomhedsøkonomi, international økonomi, afsætning og sprogfagene
HTX	Bioteknologi, teknologi, kommunikation og it

B-niveauet i matematik vil ofte være afsluttet efter to års undervisning. Derfor skal der tages højde for dette i forhold til samarbejdet med de øvrige fag.

Elever, der ikke fra starten har valgt matematik på A-niveau, men som efterfølgende ønsker at løfte matematik B til A-niveau i 3.g, skal kunne gøre dette på særlige valghold i 3.g. Undervisningen på det særlige valghold skal gennemføres i forlængelse af undervisningen på det ordinære B-forløb og under hensyntagen til B-forløbets sammenhæng med studieretningsfagene. Valghold vanskeliggør imidlertid fagligt samspil, når eleverne på sådanne hold er tilknyttet flere forskellige studieretninger. På hhx er dette en særlig udfordring, idet matematik på A-niveau vælges af meget få. Derfor optræder faget netop her oftest som et valgfag. Hertil kommer, at eleverne typisk ikke anvender matematik i de økonomiske fag, der indgår på hhx-uddannelsen, hvilket i praksis gør, at faget matematik her står ret isoleret.

På htx fylder modellering meget i forbindelse med samspil med de øvrige naturvidenskabelige og teknisk/teknologiske fag. Modellering trækker på viden og færdigheder inden for mange af matematikkens områder, såvel som på ikke-matematiske kompetencer, så som at kende

til sin omverden, kunne finde viden gennem læsning og på Internettet og meget mere. Meget af dette forekommer vanskeligt for mange elever. Inden for modellering er problemstillingerne typisk åbne, hvilket kræver, at eleverne skal forholde sig undersøgende til givne problemer internt i matematikken såvel som i faglige samspil. Dette er en stor udfordring for langt de fleste elever på de gymnasiale uddannelser.

Problem

At matematik spiller sammen med andre fag indebærer, at matematik og samspilsfagene gensidigt skal bidrage til det matematikfaglige. Der er således ikke tale om en leverandør/rekvirent-relation, men om en relation som i højere grad er på lige fod.

Eksempelvis må virksomhedsøkonomilæreren medvirke til den matematiske omplantning, for at begrebet lineær programmering konsolideres for eleverne i virksomhedsøkonomi. Ellers kan selv 'vællært' matematik kun vanskeligt gives den autenticitet, som er nødvendig for, at samspillet kan blive frugtbart. Matematiklæreren har ganske enkelt ikke nødvendigvis den virksomhedsøkonomiske autoritet, som kræves.

Matematiks berettigelse er blandt andet dets potentiale i samspil med andre fagligheder. Dette potentiale udfoldes imidlertid ikke automatisk, blot eleverne er passende forberedt fra matematikundervisningen. Mange lærere, der underviser i fag, der anvender matematik, har oplevet, at elevernes matematikberedskab visner, når det omplantes til nye faglige bede.

Løsning

Kommissionen har drøftet, hvordan det faglige samspil med studieretningens centrale fag kan styrkes, og hvordan elevernes kompetence til at forholde sig undersøgende til givne problemer i fagligt samspil kan styrkes.

Kommissionen anbefaler, at der gennem valg af emner i matematik og studieretningens centrale fag skabes øgede muligheder for aktiv involvering af de fag, som matematik skal spille sammen med. Et sådant valg skal foretages af de to fag i samråd.

Kommissionen anerkender, at det kan være svært at finde gode, reelt autentiske, eksempler, som eleverne og lærerne kan håndtere, og som ikke enten er for lette eller for svære. Derudover kan problemstillingerne ikke præsenteres alt for åbne for eleverne. Denne type arbejde kræver tæt stilladsering fra lærerside, herunder relativt præcise anvisninger på, hvilken matematik der forventes inddraget.

Kommissionen anbefaler, at kernestof og supplerende stof i matematik knyttet til fagligt samspil skal evalueres ved prøverne i matematik, herunder de skriftlige prøver på B-niveau.

Kommissionen anbefaler herudover, at alle fag – studieretningsfag eller ej - forpligtes på at forholde sig aktivt og reflekteret til de basale matematiske spørgsmål og strukturer, der naturligt måtte optræde i fagene, fx overslagsberegninger, procentregning, generel talforståelse og grafer. Kun herved kan dette elementære beredskab fastholdes som relevant for eleverne.

Hf er ikke som de 3-årige gymnasiale uddannelser organiseret i studieretninger, men i fagpakker, som udbydes af de enkelte institutioner. Kommissionen anbefaler i den forbindelse, at institutionerne forpligtes til at sikre fagligt samspil, hvor det giver mening, mellem matematik og de fag, der er bundet i samme fagpakke.

Det skal bemærkes, at tankegangen med at arbejde undersøgende fortsat er indarbejdet i Fælles Mål. Det er forventningen, at der med tiden kommer elever til gymnasiet, som kan og vil forvente at skulle arbejde undersøgelsesbaseret.

For opgraderingsholdene fra B-niveau til A-niveau ser kommissionen store vanskeligheder med at fastholde samspillet i 3g i forhold til A-niveauet. På disse hold kan samspillet nedtones væsentligt, også fordi eleverne på disse hold kommer med et B-niveau, der har haft fokus på samspillet. Da opgraderingsholdene sigter mod matematikholdige videregående uddannelser, må fagintern matematisk teori nødvendigvis have en stor vægt. Mindre fokus på samspillet med andre fag på disse hold, giver mulighed herfor.

9 Nye prøveformer

Centrale anbefalinger

- Kommissionens principper for nye prøveformer er, at prøverne skal
 - afprøve mindstekrav
 - afprøve samspil med studieretningens centrale fag
 - afspejle undervisningens arbejdsformer
 - bringe KOM-rapportens kompetencer i spil, herunder have fokus på matematiske ræsonnementer og læsning af matematiske tekster
- Kommissionen anbefaler herudover, at følgende elementer kan indgå i prøverne
 - Der kan indgå et centralt udarbejdet forberedelsesmateriale
 - Mundtlige prøver på B-niveau kan indledes med en gruppedel særligt med henblik på at få fokus på det anvendelsesorienterede
 - Ved skriftlige delprøver med begrænsede hjælpemidler kan der være adgang til en formelsamling
- Kommissionen foreslår, at der også fremadrettet igangsættes forsøgs- og udviklingsarbejde med nye prøveformer

Baggrund

Formålet med prøverne er at dokumentere de faglige kompetencer og færdigheder, som eleverne har opnået gennem undervisningen, herunder metoder med og uden digitale værktøjer.

De centralt stillede skriftlige prøver afvikles i dag i langt overvejende grad med udbredt inddragelse af digitale værktøjer. Eksaminanderne medbringer typisk selv computer eller tablet, og kan anvende de programmer og digitale materialer, som de er vant til at benytte i undervisningen. Dette gælder i matematikfagene såvel som i andre fag i de gymnasiale uddannelser. Ved de skriftlige prøver i de gymnasiale uddannelser påbegyndte Ministeriet for Børn, Undervisning og Ligestilling ved sommerterminen 2016 implementeringen af en ny webbaseret platform (Netprøver.dk) til afvikling af skriftlige prøver.

I en række fag, herunder matematik på A-niveau i stx, findes der i dag forsøgsordninger med skriftlige prøver, hvor der er adgang til internettet som fagligt hjælpemiddel under hele eller dele af prøven. Af den politiske aftale om styrkede gymnasiale uddannelser af 3. juni 2016 fremgår det, at de traditionelle skriftlige prøver på papir udfases, og nye digitale skriftlige prøver udvikles og indføres i stedet.

De digitale prøver skal bidrage til en faglig og pædagogisk forbedring af prøverne, og de må ikke forsimple indholdet af prøverne. Kommissionen bemærker hertil, at digitalisering af prøverne kræver nytænkning af, hvad prøverne skal og bør afprøve, hvis der skal opnås en faglig og pædagogisk forbedring.

Der er i de 3-årige gymnasiale uddannelser udtræk til prøverne i matematik, dvs. at eleverne ikke på forhånd kan vide, om de skal til skriftlig og/eller mundtlig prøve i matematik. I stx, htx og hhx aflægger de fleste elever i praksis enten mundtlig prøve eller skriftlig prøve eller begge dele i matematik på B-niveau eller på A-niveau. På hf er prøverne obligatoriske.

De eksisterende prøveformer på tre af de fire uddannelser er stort set ens og består af en skriftlig og en mundtlig prøve, der er adskilte, mens der på htx B-niveau afholdes én samlet projektprøve med både en skriftlig og en mundtlig dimension.

Problem

Ved mange af de skriftlige prøver, især ved prøven i stx på B-niveau, er der en alt for høj andel af eksaminanderne, ca. 20%, der ikke består prøven. Hertil kommer, at en del af besvarelsen af nogle af de stillede opgaver kan klares ved at benytte skabeloner, så det, der reelt testes, er, at eleven kan vælge den rigtige skabelon (MBUL, 2015).

Det er kommissionens vurdering, at de traditionelle mundtlige prøver i matematik, hvor eleven primært redegør for en lille del af kernestof og/eller supplerende stof, er utilstrækkelige. Dette forstærkes af, at prøveformen er udfordret af, at tjenester som Frividen, Restudy og Kahn's Academy tilbyder videogennemgange af traditionelle kernestofelementer, fx i form af sætninger og beviser. Det tegner et billede af, at faget matematik kan klares uden egentlig matematisk forståelse og blot ved udenadslære af fx disse videoer, som nogle elever godtager ukritisk.

Løsning

Kommissionen finder, at de eksisterende prøver ikke i tilstrækkelig grad kan afdække, i hvor høj grad eksaminanderne lever op til de faglige mål i matematik.

Kommissionen understreger vigtigheden af, at problemet med høje dumpeprocenter skal løses, på en måde, så det faglige niveau opretholdes på mindst det nuværende niveau.

Problemets kompleksitet understreges af, at kommissionen ikke har kunnet nå til enighed om forslag til konkrete nye prøveformer. Kommissionen har i stedet formuleret nogle principper, som de nye prøveformer, der fastlægges af læreplangrupperne, skal leve op til. Derudover har kommissionen drøftet elementer, som kan indgå i prøverne.

Kommissionen foreslår, at der fortsat gennemføres forsøgs- og udviklingsarbejde med nye prøveformer.

Kommissionens forslag har bl.a. baggrund i KOM-rapporten og i rapporten om prøveformer for stx (Matematiklærerforeningen, 2015). Nogle af principperne er naturligt knyttet til de skriftlige prøver, andre hører hjemme i de mundtlige prøver, mens andre vedrører begge. Derudover vil inddragelse af nogle af principperne være knyttet til niveauet og uddannelsen. Det er således ikke et krav, at enhver prøve lever op til alle principper.

Kommissionens generelle principper for prøverne er, at prøverne skal:

1. afprøve mindstekravene, der knytter sig til niveau og uddannelse.
2. afprøve samspil med studieretningens centrale fag
3. afspejle den daglige undervisnings arbejdsformer. Udover traditionel teorigennemgang og opgaveløsning kan dette fx være
 - a) eksperimentel tilgang til problemløsning
 - b) inddragelse af kortere, afrundede forløb, såsom projekter og særligt tilrettelagte temaforløb.
 - c) matematisk modellering

Kommissionen anbefaler, at prøverne på hvert niveau for hver uddannelse tilrettelægges således, at det er muligt at afprøve alle KOM-rapportens 8 kompetencer. Specielt fremhæves

4. Afprøvning af udførelse af matematiske ræsonnementer, herunder formulering af påstande og (elementer af) matematisk bevisførelse for disse.
5. Afprøvning af læsning og tilegnelse af matematiske tekster.

Hvilke aspekter af kompetencerne og hvordan kompetencerne dimensioneres (dækningsgrad, aktionsradius, og teknisk niveau), vil afhænge af niveauet (A, B, C) og uddannelsen (stx, htx, hhx og hf).

Kommissionen anbefaler, at der i undervisningsvejledningerne sættes fokus på, at de ovenfor nævnte tjenester (Frividen m.fl.) kan udnyttes konstruktivt ved prøverne ved, at der stilles spørgsmål og opgaver, der tager udgangspunkt i nogle af disse tjenesters fremstillinger.

Kommissionen anbefaler, at der ved de skriftlige prøver i højere grad end i dag stilles mere nuancerede opgaver, der tester stoffet bredere og dybere. Dette gælder både opgaverne, som eleverne skal løse med begrænsede hjælpemidler, og opgaver som eleverne kan løse med brug af matematikfaglige hjælpemidler som fx CAS.

Kommissionen er delt, når det gælder det tidsmæssige forhold mellem skriftlige delprøver uden hjælpemidler/med begrænsede hjælpemidler og delprøver med hjælpemidler. Nogle i kommissionen foreslår, at delprøver uden/med begrænsede hjælpemidler udvides tidsmæssigt. Andre i kommissionen foreslår, at delprøver uden/med begrænsede hjælpemidler afskaffes og i stedet erstattes af hyppige centrale test undervejs i hele uddannelsesforløbet, og at resultatet af disse test skal have indflydelse på den endelige prøvekarakter, hvis faget udtrækkes til skriftlig prøve.

For at opfylde de skærpede krav til eksamensopgaver som de digitale værktøjer, herunder CAS, har rejst, anbefaler kommissionen en gentænkning dels af det matematiske beredskab, dels på hvilket taksonomisk niveau dette beredskab skal afprøves.

Kommissionen anbefaler endvidere, at der lægges taksonomiske principper til grund for udformning af prøvespørgsmål, fx følgende taksonomi (Brown, 2010):

Mekanisk: Eleverne skal benytte standardprocedurer som opgaveteksten giver stikord til.

Fortolkende: Eleverne skal genkalde og anvende begrebslig viden. Sådanne spørgsmål involverer ikke procedurer.

Konstruerende: Eleverne skal konstruere løsninger snarere end vælge mellem alternativer. Sådanne spørgsmål kræver viden om både begreber og procedurer.

Det anbefales endvidere at tilse, at det matematiske ræsonnement indgår i fastlæggelsen af det overordnede taksonomiske niveau for et opgavesæt. CAS værktøjer kan indgå i alle opgavetyper.

10 Barrierer ved overgange i uddannelsessystemet skal reduceres

Centrale anbefalinger

- Der skal lokalt skabes rum til samarbejde mellem lærerne i grundskolen og de gymnasiale uddannelser, fx gennem aktiviteter, som de, der allerede i dag gennemføres nogle steder. En tilsvarende fremgangsmåde kan anvendes fra gymnasial uddannelse til videregående uddannelse

Baggrund

I en række forskellige udviklingsprojekter har man undersøgt overgangen fra grundskole til gymnasium, senest i (Ebbensgaard et al, 2014), som kortlægger relativt større overgangsproblemer i forbindelse med matematik end i andre fag.

Problem

Matematik er et fag, som mange elever oplever som svært, meget anderledes og mere abstrakt. I (Ebbensgaard et al., 2014) nævnes blandt andet, at

"Det drejer sig om niveauet, hastigheden og abstraktionen. De faglige krav er høje, undervisningen bevæger sig så hurtigt fremad, at eleverne oplever, de bliver sat meget tilbage, hvis de mister en enkelt time eller to. De har fra grundskolen været vant til, at der var længere tid til at få forklaret tingene og til at vende tilbage til dem, hvis nogen ikke havde forstået dem. Noget af det, eleverne finder vanskeligt, er den mere abstrakte tilgang til stoffet, beviserne og redegørelserne for, hvad man gør eller kan gøre".

Yderligere havde man i projektet (Ebbensgaard et al., 2014) fokus på, hvad eleverne oplever som svært, let og anderledes i overgangen i fagene matematik, dansk og engelsk, og 24% af eleverne svarer, at det stort set er alt, der er svært i matematik. Kun 6% af eleverne oplever matematik som samme fag i folkeskole og gymnasium, hvor det for dansk og engelsk er meget større andele. I de interviews, der supplerede spørgeskemaundersøgelsen, var følgende udsagn typiske: *"alt er svært", "læreren er ikke særlig god til at forklare det, som er svært"*.

Overgangen fra grundskolen til gymnasiet kan ikke forklares ved læreplanerne alene. I beskrivelserne af formål, mål og fagligt indhold er der nemlig en fin sammenhæng mellem uddannelserne. Der er måske mere tale om forskelle i fagkulturer på de to uddannelsesstrin. Eleverne kommer fra grundskolen med en tilgang, der domineres af problemregning indenfor hverdagsanvendelser, og i gymnasiet mødes de af krav om en mere abstrakt, teoretisk og analyserende tilgang.

Lærernes opfattelse af overgangen fra grundskole til gymnasium handler bl.a. om kravene til arbejdsindsats og forberedelse. En stor del af drengene har ikke haft behov for at arbejde særlig intensivt for at lære det nødvendige for at klare sig godt i grundskolens matematikundervisning, og de (drengene) oplever selv, at der stilles større krav i gymnasiet til forberedelse og arbejdsindsats, end de har været vant til. Samtidig oplever de (det gælder både drenge og piger), at de har svært ved at læse bøgerne i matematikundervisningen, og de læner sig derfor op ad lærerens gennemgang. (Bacher-Jensen et al., 2011).

Mange lærere peger derudover på elevernes manglende basale færdigheder. Det er basale regnefærdigheder så som brøkgregning, potensregneregler, simpel ligningsløsning, reduktion af symboludtryk, modelleringsopgaver, og læsning af matematikholdig tekst, jf. Matematikudredningen (MBUL, 2015).

Aftagerinstitutioner peger på de samme manglende færdigheder som gymnasielærerne selv peger på. Så problemet lever videre. Dette skyldes antageligt, at der er et permanent reparations efterslæb.

Matematikudredningen fremhæver generelle kompetencer med henblik på samarbejde, projektarbejde etc. som de nye studerendes væsentligste styrker, når de påbegynder en universitetsuddannelse. Aftagerne nævner også fordelene af, at de studerende har erfaringer med brug af matematiske værktøjsprogrammer, og at de derigennem besidder en parathed til at lære nye programmer. Samtidigt fremhæves imidlertid, at programbeherskelsen ofte er kendetegnet ved teknisk ukritisk brug af standardprocedurer og ikke avanceret håndtering af programmerne baseret på matematisk indsigt. Aftagerne efterspørger i denne sammenhæng erfaringer med en arbejdsform, hvor der undervejs i en given løsningsproces veksles mellem brug af CAS og 'papir & blyant'.

De matematikfaglige mangler, der nævnes ved overgange fra gymnasiet til videregående uddannelser, handler hovedsageligt om basale færdigheder, dybere begrebsforståelse, grafisk forståelse, matematisk tankegang og grundlæggende forståelse af, hvad et matematisk ræsonnement er. Disse mangler gør det særligt vanskeligt for de studerende at lære nyt stof, fordi alt synes svært.

Med hensyn til anvendelse af kendt matematik i nye abstrakte fagligt interne eller konkrete eksterne kontekster, fx opstilling af modeller i naturvidenskabelige fag, er de studerendes kompetencer mindre gode. Netop opstilling af modeller er svært og dyrkes kun i mindre grad i gymnasiets matematikundervisning i dag. En mere systematisk dybere og bredere behandling af 'præ-matematisering' i arbejdet med matematiske modeller kunne formentlig på det punkt være med til at lette overgangen til videregående uddannelser. Præmatematisering er et hovedaspekt af, hvad kommissionen har kaldt transversalt matematisk arbejde, jf. beskrivelsen af den trefasede matematiktilegnelse i indledningen.

Der efterspørges ikke nye emner i matematikfaget (kun elementær sandsynlighedsteori bliver nævnt), men i stedet udtrykkes et ønske om mere solid kunnen indenfor de aktuelle emner, herunder en form for matematisk dannelse, der gør eleverne i stand til at overskue og løse matematikholdige problemer og vurdere, hvad der er let og svært at løse.

Løsning

Kommissionens anbefalinger vedrørende matematik i grundforløbet adresserer direkte overgangsproblematikken fra grundskole til gymnasial uddannelse.

På lokalt niveau gennemføres der mange indsatser med brobygning mellem folkeskole og gymnasium. Fx *Matematiklærernetværket* i Silkeborg, hvor man siden 2001 har arbejdet med overgangen ved, at lærere samarbejder på tværs af grundskole og gymnasium og sammen udvikler matematikopgaver, der illustrerer progressionen i krav til matematisk præcision og abstraktion. Det gøres bl.a. ved at videreudvikle opgaver fra folkeskolens seneste afgangsprøve. Fx arbejder alle matematikhold i 1.g videre med den afgangsprøve, som netop er overstået i folkeskolen. (Christensen, 2012).

Senest er der igangsat et nyt udviklingsprojekt i Silkeborg, *Matematikbroen*, som handler om efteruddannelse af folkeskolelærere med henblik på at lette overgangen for eleverne.

I projekterne om gymnasiefremmede elever (Ulriksen et al., 2013), såvel som i projekterne om overgangen mellem grundskole og gymnasium (Ebbensgaard et al., 2014), understreges

behovet for, at man i gymnasiet arbejder mere med at tydeliggøre faglige mål, hensigtsmæssige arbejdsmetoder mm. Det vil kunne bidrage til at lette overgangen for mange elever.

Kommissionen anbefaler, at der lokalt skabes rum til samarbejde mellem grundskolens lærere og lærerne i de gymnasiale uddannelser.

Kommissionen påpeger, at der er et tilsvarende behov for samarbejde om overgangen fra gymnasial uddannelse til videregående uddannelse.

11 Lærernes didaktiske og pædagogiske kompetencer skal styrkes

Centrale anbefalinger

- Indholdet i pædagogikumuddannelsen justeres, så det tager højde for de erkendte problemstillinger, som flere undersøgelser af matematikfaget i gymnasiet har afdækket, fx elevernes store faglige spredning, manglende motivation og arbejdsindsats, tidspres og fagligt samspil. Disse problemstillinger skal også være gennemgående temaer i erfarne læreres efteruddannelsesaktiviteter
- I uddannelsen, der sikrer faglig kompetence til matematikundervisning i gymnasiet, eller som en overbygning på denne uddannelse, bør der være et praksisorienteret element, der sigter direkte mod professionen som matematiklærer i de gymnasiale uddannelser
- Kommissionen anbefaler, at der igangsættes et udviklingsarbejde med fokus på betydningen af vidensmotivation for at lære matematik.

Baggrund

De nyuddannede lærere vurderer ifølge Matematikudredningen, at især udbyttet af praktisk pædagogikum er stort, men også de fagdidaktiske kurser vurderes positivt, fordi lærerne her præsenteres for værktøjer, der er direkte anvendelige i egen undervisningspraksis. Endvidere peges på relevansen af stofdidaktiske kurser, der kan understøtte lærerens omsætning af teoretisk viden fra matematikstudiet til matematikundervisning i de gymnasiale uddannelser. Dette vil kunne understøtte lærernes udvikling af forløb med fokus på undervisningsdifferentiering og design af differentieret undervisningsindhold på forskellige teoretiske niveauer.

Ifølge Matematikudredningen giver lærerne udtryk for, at deres erfaringer med eksperimenterende og induktive tilrettelæggelser er meget positive, men samtidigt oplever de det meget tidskrævende at planlægge og gennemføre. Derfor nedprioriteres det ofte, og de efterlyser derfor effektive værktøjer til at dyrke netop disse strategier.

Desuden efterlyser lærerne efteruddannelse i anvendt matematik som grundlag for faglige samarbejder, fx nævnes Hardy-Weinberg-loven i samarbejde med biologi, Gini-koefficienter i samarbejde med samfundsfag og koblede differentialligninger i fysik.

Endelig peger lærerne selv på nødvendigheden af efteruddannelse med henblik på inddragelse af digitale værktøjer, herunder CAS, og meget specifikt på inddragelse af disse i begrebsindlæringen. De matematiske værktøjsprogrammer stiller også nye krav til lærernes arbejde med henblik på at sikre kvalitet og stringens af elevernes skriftlige besvarelser, herunder systematisk feedback.

Ifølge Matematikudredningen bruger lærerne i høj grad deres personlige engagement som middel til at styrke elevernes motivation, men mange peger også på fagligt samspil og eksperimenterende elementer. En særlig udfordring, som er beskrevet i en undersøgelse fra 2009 om drenge og matematik (Bacher-Jensen et al., 2011), viser sig gennem en tendens til at drenge forbereder sig mindre end piger. Forklaringer går i retningen af, at mange af disse drenge har kunnet klare sig i grundskolen uden nævneværdig forberedelse, og de har svært ved at omstille sig til gymnasiets øgede krav. Indførelsen af mindstekrav kan formentlig bidrage til at mindske omfanget af dette problem, idet det med introduktionen af mindstekravene bliver mere tydeligt for eleverne, hvad der kræves for at bestå faget matematik.

Motivation i relation til læring har gennem flere år været genstand for uddannelsesforskning og undersøgelser både i Danmark og internationalt (Ågård, 2015). Resultaterne heraf peger

primært på eksterne faktorer til opretholdelse eller skabelse af motivation for at lære, og forholder sig kun i begrænset omfang til en iboende vidensmotivation (videbegær og nysgerrighed). Motivation for at lære matematik kan naturligvis som i andre fag vækkes og udvikles gennem eksterne påvirkninger, fx gennem anvendelser af faget i en konkret kontekst og gennem relationer til læreren og andre elever i læringssituationen. Noget tyder på (EACEA, 2011), at vidensmotivation samt succesoplevelser i arbejdet med fagets identitet og metode (kernefagligt arbejde) er særlig afgørende for at lære matematik.

Problem

De oven for nævnte undersøgelser rejser en række aktuelle problemstillinger for såvel de nyuddannede læreres som de mere erfarne læreres fagdidaktiske kompetencer.

Løsning

Kommissionen anbefaler, at pædagogikumuddannelsen justeres, så der sættes større fokus på

- Fagdidaktiske og stofdidaktiske kurser, blandt andet med henblik på differentieret undervisning og anvendelse af digitale teknologier.
- Undervisning med fokus på eksperimentende metoder
- Matematikanvendelser og matematik i samspil med andre fag
- Digitale teknologier generelt, herunder CAS
- At understøtte elevernes læsning af matematiske tekster
- Elevernes motivation for og engagement i at lære matematik
- Udnyttelse af løbende feedback og faglige tests, herunder test af faglige mindstekrav
- Overgangen fra grundskole til gymnasium

Kommissionen anbefaler derudover, at ovenstående elementer også bliver gennemgående temaer i erfarne læreres fremtidige efteruddannelsesaktivitet.

Endelig anbefaler kommissionen, at der igangsættes et udviklingsarbejde med fokus på betydningen af vidensmotivation for at lære matematik.

12 Bilag

12.1 Bilag 1: Kommissorium for matematikkommission for de gymnasiale uddannelser

Det indgår i aftale af 3. juni 2016 mellem regeringen, Socialdemokraterne, Dansk Folkeparti, Liberal Alliance, Det Radikale Venstre, Socialistisk Folkeparti og Det Konservative Folkeparti om styrkede gymnasiale uddannelser, at der skal iværksættes en generel indsats for faget matematik. Indsatsen omfatter nedsættelse af en matematikkommission, der bl.a. skal give forslag til udvikling af fagets indhold, didaktik, prøveformer og faglige overgange fra grundskole til gymnasiale uddannelser og videre til videregående uddannelse. Indsatsen skal styrke det faglige niveau i matematik og ses i sammenhæng med et forventet højere niveau i matematik hos eleverne, når styrkelsen af faget i forbindelse med folkeskolereformen slår igennem.

Formålet med kommissionen

I overensstemmelse med aftalen af 3. juni 2016 om styrkede gymnasiale uddannelser er det regeringens og aftalepartiernes mål at opnå en styrkelse af elevernes kompetencer i matematik i de gymnasiale uddannelser og bredt i uddannelsessystemet.

Kommissionen skal bidrage til

- at sikre optimale rammer for matematik på et højet fagligt niveau samt sikring af matematisk anvendelsesorientering, uden at det faglige niveau sænkes
- at sikre, at sigtet med hver enkelt af fagets niveauer (C,B, A) på hver af de gymnasiale uddannelser er tydelig for både lærere og elever
- at sikre, at læreplanernes mål- og indholdsbeskrivelser er i overensstemmelse med formålet med det pågældende fagniveau
- at sikre, at A-niveauet som hidtil kan gennemføres som et sammenhængende forløb, samt tilsvarende for B-niveauet
- at elever, som ikke fra starten af uddannelsen vælger A-niveau, henholdsvis B-niveau, ved opgradering fra C til B og fra B til A møder sammenhæng og progression mellem fagniveauerne
- at styrke samarbejdet mellem matematik og relevante andre gymnasiale fag, herunder primært studieretningsfag i de 3-årige uddannelser samt den 2-årige uddannelse til almen studentereksamen, med det sigte at øge motivationen for matematisk læring, øge den matematiske forståelse, anvendelsen af matematik og at styrke fagligheden i de pågældende samarbejdsfag
- at give et grundlag for udvikling af prøveformer i faget, som er velegnede til vurdering af målopfyldelsen i overensstemmelse med læreplanernes mål- og indholdsbeskrivelser

-
- at styrke elevernes læring gennem bedre evaluering og feedback
 - at styrke sammenhæng og progression i matematikundervisningen ved overgangen fra grundskole til de gymnasiale uddannelser og fra de gymnasiale uddannelser til de videregående uddannelser
 - at styrke lærernes kompetencer, herunder it-didaktiske kompetencer, så det sikres, at elevernes matematiklæring styrkes og realiseres i overensstemmelse med målene.

Indholdet i kommissionens arbejde

Kommissionen skal vurdere behovet for initiativer til realisering af ovennævnte mål og i overensstemmelse hermed udarbejde input til ændringer og initiativer på de pågældende områder, herunder

- ændringer af læreplaner, især læreplaner på B- og A-niveau, herunder mulige ændringer, som sikrer et tættere samarbejde med elevernes studieretningsfag på A-niveau
- forslag til nye prøveformer, som er velegnede til at vurdere målopfyldelse i forhold til samtlige videns-, færdigheds- og kompetencekrav for de respektive fagniveauer, herunder de nye krav, der for de treårige uddannelser foreslås til styrkelse af samarbejdet med studieretningsfag på A-niveau
- forslag til initiativer, der kan styrke evaluering og feedback og mulighederne for at eleverne opnår et bedre fagligt niveau
- initiativer til styrkelse af sammenhæng og progression i matematikundervisningen i overgangene mellem grundskole og gymnasiale uddannelser samt mellem gymnasiale uddannelser og de forskellige typer videregående uddannelser
- initiativer, der kan styrke lærernes kompetencer
- initiativer i øvrigt, der bredt i uddannelsessystemet kan styrke elevernes kompetencer i matematik.

Proces for kommissionens arbejde

Kommissionen skal med inddragelse af viden fra relevante undersøgelser, forskningsprojekter, forsøgs- og udviklingsarbejde samt internationale erfaringer analysere og give anbefalinger til ændringer af faget matematik, jf. ovenstående. Kommissionens anbefalinger skal kunne fungere som et solidt vidensgrundlag for efterfølgende ændringer af læreplaner, prøveformer mv.

Det forventes at kommissionen mødes ca. 5 gange i august-oktober 2016. Kommissionen afrapporterer i oktober/november 2016 til ministeren for børn, undervisning og ligestilling.

Til at sekretariatsbetjene kommissionen nedsætter Ministeriet for Børn, Undervisning og Ligestilling et sekretariat, som i samarbejde med kommissionen leverer det materiale, der skal danne grundlag for kommissionens drøftelser, herunder udkast til kommissionens rapport. Sekretariatet sammensættes således, at der indgår ekspertise vedr. matematikfaget i de gymnasiale uddannelser, folkeskolen og erhvervsuddannelserne samt vedr. centrale samarbejdsfag for matematik i de gymnasiale uddannelser.

Baggrund

Der er i dag en række udfordringer for matematikfaget i de gymnasiale uddannelser, herunder med det faglige niveau, eleverne opnår. Mange består ikke de skriftlige prøver ved eksamen, og mange elever har svært ved at anvende deres matematikfærdigheder i praksis. Hertil kommer, at ca. 10 pct. af studenterne supplerer deres studentereksamen inden for to år efter aflagt eksamen. Matematik på A- og B-niveau udgør godt 40 procent af GSK-aktiviteten.

Udfordringerne er størst på fagets B-niveau, hvor en del af eleverne mangler eller mister motivationen for at lære matematik, men de findes også på A-niveau. I dag har ca. 84 pct. af eleverne i stx matematik på mindst B-niveau, heraf afslutter ca. halvdelen matematik på A-niveau. Af de elever, der afslutter matematik på A-niveau, har 2/3 af eleverne faget som studieretningsfag og 1/3 som valgfag. Nogle af disse A-niveau-elever opnår matematik A-kompetencen gennem ét års opgradering fra B- til A-niveau i 3.g. Denne mulighed for opgradering fra B til A er en udfordring for mange elever, bl.a. fordi fokus på de to niveauer er forskelligt. Matematik på A-niveau har bl.a. som sigte at forberede studenterne til de særligt matematikholdige uddannelser indenfor bl.a. naturvidenskab, teknik og økonomi. Derfor spiller matematisk teori en større rolle på A-niveauet i modsætning til B-niveauet, som i højere grad har en anvendelsesorienteret profil og ikke primært skal danne grundlag for opgradering til A-niveau.

Matematik på B-niveau har således den særlige udfordring, at det skal opfylde flere mål i uddannelserne. Dels skal det været et fag, der har en afrundet karakter, som giver adgang til en række videregående uddannelser, og som kan indgå i samarbejde med andre studieretningsfag. Dels skal det være et fag, der kan bruges som grundlag for en opgradering til A-niveau i 3.g.

I sammenhæng med den øgede tilgang til de gymnasiale uddannelser er der kommet en større spredning i elevforudsætningerne. Bindingerne mellem fagene, hvor valg af et naturvidenskabeligt fag på A-niveau samt samfundsfag på A-niveau kræver matematik på mindst B-niveau, har givet en større andel af elever, der skal have matematik på B-niveau og dermed en større spredning i elevforudsætninger på især matematik B-niveau.

Der er udfordringer ved overgangene mellem uddannelsesstrinnene, fra grundskolen til de gymnasiale uddannelser og fra de gymnasiale til de videregående uddannelser. Ud over de problemer, der vil være i tilfælde af mangler i elevernes matematiske færdigheder og fagligt niveau i forhold til det forventede, kan der typisk opstå vanskeligheder for eleverne ved overgangen fra grundskole til de gymnasiale uddannelser pga. forskelle i fagkulturerne og abstraktionsniveauer.

Den digitale udvikling har stor betydning for undervisningen i matematik og for fagets udvikling herunder mål, indhold og prøveformer. Computerbaserede matematiske værktøjsprogrammer i undervisningen åbner for nye tilgange til dele af matematikken og dens anvendelser, idet de avancerede matematikprogrammer kan løse matematiske problemer, som det

ellers ville være uden for elevernes rækkevidde at håndtere. Desuden åbner de digitale læringsredskaber muligheder for nye måder at tilrettelægge undervisningen på, som styrker elevernes læring. Det kan fx være en mere eksperimenterende tilgang til faget. Denne positive udvikling i anvendelsen af it og digitalisering har imidlertid også medført udfordringer mht. at sikre, at de skriftlige opgaver er egnede til at vurdere graden af målopfyldelse, idet værktøjsprogrammerne i høj grad kan bidrage til elevernes løsning af opgaverne. Denne udfordring er især stor for matematik B, hvor anvendelse af ”skabelonbesvarelser” er steget markant gennem de seneste år.

Bilag A til bilag 1:

Elementer i aftale af 3. juni 2016 om styrkede gymnasiale uddannelser af særlig betydning for matematik

Aftalen om at styrke de gymnasiale uddannelser indeholder ændringer, som har betydning for de udfordringer, der kræver en særlig indsats i matematik. Ud over aftale om at nedsætte en kommissionen for matematik forventes især følgende ændringer at få betydning for undervisningen i matematik:

- *Adgangskrav:* Der indføres ændringer i regler om adgang til optagelse på en gymnasial uddannelse. Ændringerne indebærer bl.a., at kravene til de faglige forudsætninger i uddannelsesparathedsvurderingen øges fra mindst 4 til mindst 5 i gennemsnit af de afsluttende standpunktskarakterer, og at dette faglige niveau skal bekræftes ved folkeskolens eksamen. Bekræftes niveauet ikke, er adgang dog fortsat muligt, fx hvis eleven opnår mindst 2 i gennemsnit i de prøvebundne fag ved folkeskolens eksamen, dvs. dansk, matematik, engelsk og fysik/kemi, eller - til hf efter 10. klasse - hvis eleven har mindst 2 i dansk og matematik. Desuden er der adgang uanset uddannelsesparathedsvurdering, hvis eleven har 6 i gennemsnit af de prøvebundne fag.
- *Kortere grundforløb med skriftlig prøve:* Grundforløbene i stx, hhx og htx ændres fra et halvt år til et tre måneder langt afklaringsforløb. Der indføres en skriftlig, intern prøve ved afslutningen af grundforløbet. Prøven skal afdække elevens matematikniveau for at sikre, at eleverne har det faglige fundament på plads.
- *Obligatorisk årsprøve i matematik samt nye prøveformer i matematik ved afsluttende eksamen:* For at styrke den faglige evaluering og feedback i matematik, indføres der mindst én obligatorisk årsprøve for elever med matematik på B- og A-niveau. For både at kunne vurdere elevens matematiske færdigheder og evner for praktisk matematisk anvendelse indføres der nye prøveformer i mundtlig og skriftlig matematik.
- *Det naturvidenskabelige grundforløb (NV)* gentænkes med vægt på naturvidenskabelig dannelse. Forløbet skal fortsat fungere som introduktion til naturvidenskabelig tankegang og metode. NV skal fremover bestå af 45 timer, der hentes fra de timer, der er afsat til naturvidenskabelige fag og matematik. NV afsluttes med en intern prøve, hvor karakteren tæller med på eksamensbeviset.
- *Naturvidenskab i stx:* I sammenhæng med omlægningen af NV ændres mindstekravene til naturvidenskab. Alle elever i stx skal fortsat have obligatorisk fysik og yderligere mindst to naturvidenskabelige fag på C-niveau (mindst to af fagene biologi, kemi og naturgeografi). For elever i de naturvidenskabelige studieretninger indføres krav om enten fire naturvidenskabelige fag eller om tre naturvidenskabelige fag på mindst B-niveau eller på ABC-niveau. Elever i sproglige studieretninger kan erstatte et naturvidenskabeligt fag på C-niveau (dog ikke fysik) med latin C.
- *Obligatorisk matematik B i hhx og stx for de fleste:* For at styrke elevernes matematiske kompetencer og reducere deres suppleringsbehov efter gymnasiet skal matematik B være obligatorisk i hhx og stx. Det skal gælde for langt de fleste med undtagelse af elever med stærk sprogprofil. I stx undtages elever med tre sprog på mindst AAB-

niveau eller med flere end tre sprog fra kravet om matematik på B-niveau. I hhx gælder det alle elever med tre eller flere sprog.

- *Bedre og færre studieretninger:* For at skabe et mere ensartet og overskueligt studieretningsudbud på både store og små gymnasier begrænses kombinationerne til en række centralt fastlagte studieretninger. Det forventes, at en større andel af eleverne vælger studieretninger med matematik A. Selv om væsentlig færre elever dermed forventes at skulle opgradere fra B- til A-niveau i 3.g, skal dette fortsat være muligt.
- *Naturvidenskabelig studieretning med matematik B:* Matematik A indgår i de fleste naturvidenskabelige studieretninger, men for at skabe motivation for fagområdet, oprettes en biologisk-kemisk naturvidenskabelig studieretning med matematik B, som skal motivere og klæde eleverne godt på til for eksempel en professionsbacheloruddannelse inden for sundhed eller naturvidenskab.
- *Samarbejde med andre fag:* For at øge motivationen for matematikfaget og træningen i praktisk matematikanvendelse skal eleven præsenteres for emner, hvor matematik naturligt indgår som en faglig ressource, som uddyber eller strukturerer kernestof i et (andet) studieretningsfag på A-niveau. I stx vil det være de naturvidenskabelige fag eller samfundsfag. I hhx skal matematikfaget anvendes i et tæt samspil med de økonomiske fag, og i htx med både teknologiske og naturvidenskabelige fag. Eleven skal desuden lære at læse matematiske tekster og tekster, hvor matematik anvendes i andre faglige sammenhænge.
- *Forbedring af matematiklærernes pædagogiske kompetencer:* Det er vigtigt, at matematiklærernes pædagogiske kompetencer øges, så de har de bedste forudsætninger for at optimere udbyttet af de ændrede krav i matematik. De nye gymnasielærere skal klædes på til at håndtere matematikfagets særlige udfordringer gennem en tilpasning af pædagogikum. Desuden sker der en tilpasning af udviklingsprojektet ”Faglig udvikling i praksis” (FIP), så det støtter op om de nye initiativer i matematik.
- *Karakterer fra suppleringsfag skal tælle med i gennemsnittet:* For at forhindre karakterspekulation skal karakterer i suppleringsfag tælle med i det karaktergennemsnit, der benyttes ved optagelse af danske studenter på videregående uddannelse. Indregning af karakterer fra suppleringsfag skal ske sådan, at karakterer opnået ved suppleringsfag ikke kan hæve gennemsnittet. Gennemsnittet kan således kun enten blive bevaret eller blive sænket.

12.2 Bilag 2: Kommissionens sammensætning

Medlemmer af matematikkommissionen

- Niels Grønæk, professor, Institut for matematiske fag, KU, formand for kommissionen
- Anne-Birgitte Rasmussen, rektor, Københavns Åbne Gymnasium
- Charlotte Krog Skott, lektor, Professionshøjskolen UCC

-
- Jesper Bang-Jensen, uddannelsesleder, Sct. Knuds Gymnasium
 - Kasper Bjering Søby Jensen, lektor og ph.d
 - Lisbeth Fajstrup, lektor, Institut for Matematiske Fag, AAU
 - Marit Hvalsøe Schou, lektor, Odense Tekniske Gymnasium og ph.d.-studerende på SDU, Institut for Matematik og Datalogi
 - Maybrit Christensen, underviser, KNord Handelsgymnasium
 - Michael Lumholt, administrerende direktør, TICRA
 - Rikke Kjærup, fagkonsulent/læringskonsulent for matematik i folkeskolen
 - Solvejg Jørgensen, lektor, studieleder på bachelor- og kandidatuddannelsen i kemi, Kemisk Institut, KU
 - Steen Laugesen Hansen, lektor, Niels Bohr Institut, KU
 - Steen Markvorsen, professor, DTU.

12.3 Bilag 3: Kommissionens aktiviteter

Kommissionen har afholdt 7 møder:

13. september 2016, kl. 13-15

23. september 2016, kl. 13 – 16

10. oktober, 2016 kl. 13 – 16

24. oktober 2016, kl. 13 – 16

9. november 2016, kl. 13 – 16

15. november 2016, kl. 13 – 16

29. november 2016, kl. 9 – 10.30

12.4 Bilag 4: Overordnede principper

12.4.1 Robusthed

Matematik udgøres af idéer, som er så robuste, at vi kan behandle og bruge dem som ting. Hele vores sproglige omgang med matematik afspejler dette: Vi opstiller, finder, flytter, konstruerer, afbilder, osv. For at eleverne kan udnytte denne robusthed, kræves at deres omgang med matematik også er robust. Fx skal ligninger (robust idé) manipuleres med teknikker og metoder som pålideligt fører til afklaring om løsninger (robust omgang). En forudsætning for, at matematikken således udøves robust er, at matematiske begreber, repræsentationer, metoder etc. bliver undervist på en sådan måde, at de kan videreføres fra et trin i uddannelsessystemet til et andet. Der skal være enighed om, hvad de går ud på, og hvordan de omtales. Herved kan matematik fremstå som ét fag, der er robust over for

- omplantninger (fx i forbindelse med faglige samspil)
- overgange i uddannelsesforløb også internt i gymnasiet
- uddannelsernes faglige progression

Eleverne skal opleve dette. Reparation/forkastelse af tidligere erhvervet indsigt er ødelæggende for lyst til og muligheder for læring.

Robusthedsbegrebet er inspireret af (Manin, 2007) og (Chevallard, 2009),

12.4.2 Mindstekrav og basale færdigheder

Kommissionen opererer med to slags grundlæggende matematikberedskab, *mindstekrav* og *basale færdigheder*.

Hvad er forskellen?

Det kan kort formuleres

Mindstekrav: Sigter mod *beståelse*. Mindstekrav handler altså om eksamen.

Basale færdigheder: Sigter mod *forståelse*. Basale færdigheder handler altså om tilegnelse og omgang med matematik

Mindstekrav angår indhold og kompetencer fra læreplanen på det niveau, der afprøves, og fastlægges ved en faglig og taksonomisk vurdering, som afspejler det pågældende trin. Basale færdigheder fastlægges ud fra en rent faglig vurdering. Basale færdigheder kan både være medbragte og omhandle nyt stof.

Hvad karakteriserer basale færdigheder?

I forhold til matematikfaget

Basale færdigheder er fundamentale, for at man kan udøve faget korrekt og selvstændigt.

Basale færdigheder er med til at sikre, at elevens omgang med matematik bliver robust – både når matematikken anvendes, og når der arbejdes inden for faget selv.

Basale færdigheder kommer til syne i bestemte kontekster, men er generelle af natur. Herved er de med til at sikre, at faget opleves sammenhængende.

I forhold til besiddelsen

Basale færdigheder skal være internaliserede i en grad, så de kan mobiliseres umiddelbart, dvs. uden at skulle søge, studere, udlede etc. NB: Dette er ikke det samme som udenadslæren! Det er snarere, hvad man kunne kalde *rygmarvsadfærd*, dvs. automatiserede færdigheder og rutiner.

Basale færdigheder skal holdes ved lige, ellers forgår de. Dette betyder også, at de evt. skal opgraderes i relation til den faglige progression.

Så nogle færdigheder forsvinder. Det kan være ok, og det kan være katastrofalt.

Og nye kommer til i den faglige progression.

Nogle eksempler i tilfældig rækkefølge

- At benytte regnereglernes hierarki, parentesregler etc. med sikkerhed.
- At følge og selv foretage målrettede udledninger af algebraiske udtryk ved hjælp af et repertoire af algebraiske manipulationer.
- At løse ligninger af bestemte typer ved hjælp af et repertoire af løsningsstrategier.
- At kunne bestemme konkrete funktionsværdier ud fra funktionsudtryk, herunder funktionsudtryk, der er opbygget af andre.
- At benytte et repertoire af regneregler inden for relevante grunddiscipliner (trigonometri, differential- og integralregning, etc.) korrekt.
- At kunne bestemme funktionsværdier ud fra en funktionsligning (funktionalligning, differentiaalligning, etc.)
- At kunne skelne mellem præmis og konklusion.

Hvad karakteriserer mindstekrav?

Kommissionen har indført begrebet for at kunne pege på, hvad der skal til for at 'bestå', og præcis sådan skal de opfattes - helt i overensstemmelse med karakterbekendtgørelsens beskrivelse af karakteren 02.

De vil direkte indbefatte basale færdigheder som skal erhverves på niveauet, fx bestemmelse af $f'(27)$ ud fra en differentiaalligning og oplysning om værdien af $f(27)$. Medbragte basale færdigheder indgår kun indirekte (fordi de er basale, men ikke hører til niveauets pensum).

Nogle mindstekrav er ikke basale, fx CAS-indtastning til beregning af centrale størrelser i en χ^2 -test eller af parametre i en regression. Det kan høre med til, hvad man skal kunne på niveauet, men har ikke basale færdigheders generelle natur.

12.4.3 Grundlag, Transversalt og Longitudinalt matematisk arbejde.

Grundlag udgøres af de basale færdigheder opfattet som et *arsenal*. Matematisk arbejde kræver sikkerhed i omgang med matematik. Fx kræver konsolidering af begrebet differentialkvotient, at man kan håndtere differenskvotienter for polynomier ubesværet.

Transversalt matematisk arbejde vedrører *kontekst* dvs. processer i forholdet mellem ”virkeligheden” og matematikkens begrebs- og symbolverden (de matematiske idéer).

Den har to retninger, *indad* (dekontekstualisering) og *udad* (rekontekstualisering).

Indad optræder det på to måder:

- (1) Som mulighed for anvendelse af et matematikberedskab eleven allerede besidder. Det typiske eksempel er modellering af ’virkeligheden’ med matematik, som eleven allerede har stiftet bekendtskab med. Eksemplerne fra Progressionsrapporten for hhx og htx (UVM, 2014) er af denne type.
- (2) I forbindelse med dannelse af nye matematiske idéer, fx hastighed i bevægelse, vækstfænomener, stejlhed på cykelstien, stejlhed på en parabel, som fører til begrebet differentialkvotient.

Udad: Matematik til *prognose, tolkning, beskrivelse* (fx når en udarbejdet model bruges til at svare på de spørgsmål der motiverede modellen, jf. Progressionsrapportens ”Tilbage til ...”) og til *design* af ”virkeligheden” (det gyldne snit, A4-format, principper såsom symmetri, etc.)

Longitudinalt matematisk arbejde handler om matematikinterne forhold, dvs. de matematiske processer mellem stadier i den faglige progression, som gør faget til en logisk opbygget kumulativ struktur: udvidelse af fortolkninger af ’gamle’ matematiske idéer, indpasning af nye idéer osv. Longitudinalt matematisk arbejde giver sammenhængskraft og kræver robusthed.

Nogle eksempler på longitudinalt matematisk arbejde:

- En *model*: Den lineære model, i grundforløbet. fra elevernes grundskoleforståelse af ’ret linje’, gennem formalisering af forskellige linjebegreber til lineær interpolation, lineær approksimation og lineær regression.
- En *betragnetingsmåde*: Approksimation fra decimaludvikling, gennem differentialkvotient til taylorudvikling.
- Et *begreb*: Funktion fra input-output maskiner og ’sildeben’, gennem eksempler fra funktionsklasser (polynomier, potensfunktioner, etc.) til funktioner som løsninger til ligninger, stokastiske variable etc.

Generelle bemærkninger

KOM-rapporten er i fin overensstemmelse med disse begreber. Fx kommer modelleringskompetencen i spil i transversalt arbejde, og ræsonnementskompetencen er i spil i det longitudinale.

Transversalt og longitudinalt matematisk arbejde er duale aspekter af matematik. Afhængigt af niveau - C, B, A - vil der være tale om en tilsigtet afvejning. Det ene begreb er ikke mere avanceret end det andet. Man kan sagtens have matematikudøvere med meget højt 'longitudinalt præstationsniveau' og meget overfladisk 'transversalt niveau', og omvendt. I gymnasiesammenhæng er begge dele uønskeligt. Der er heller ikke tale om en fast rækkefølge, hvad de- og rekontekstualisering jo direkte peger på.

Begreberne transversalt og vertikalt arbejde er inspireret af *Realistic Mathematics Education* (RME). For en nærmere redegørelse se (Kieran et al, 2015) og (Michelsen & Iversen, 2009), se også (Niss, 2012).

12.4.4 Matematiske kerneaktiviteter, out- og insourcing.

Kerneaktiviteter

En matematisk kerneaktivitet er kendetegnet ved to forhold (1) matematisk kontrol (2) faglig overlegenhed. Dette betyder

- (1) typer af opgaver som løses ved en *måltrettet aktivitet*
 - a. der udføres ved en fremgangsmåde, som undervisningen ideelt set har givet *fuld indsigt* i, både hvad angår fremgangsmådens *udførelse* og dens indplacering i *matematisk teori*, således at
 - b. eleven ideelt set er *i kontrol* med alle aspekter af aktiviteten.
- (2) opgaverne, som er knyttet til aktiviteten, *løses bedre af matematik* end af andre (af gymnasiets fag).

Eksempler

At afgøre om en given matematikaktivitet er en kerneaktivitet eller en ikke-kerneaktivitet rummer et element af fortolkning. Men her er nogle eksempler, som illustrerer (man må selv forestille sig omstændighederne for fortolkningen)

- Løsning af ligninger i hånden er en matematisk kerneaktivitet.
- Løsning af ligninger med CAS (solve-kommando) er normalt en ikke-kerneaktivitet. Da eleverne ikke studerer den bagvedliggende kodning af kommandoen, kan fremgangsmåden ikke være indplaceret i matematisk teori. De har ingen kontrol over, hvad der foregår.
- At give mening til resultatet af 'solve' kan være en matematisk kerneaktivitet. Det kunne fx være at vælge blandt CAS-værktøjets løsningsforslag.

-
- Udførelse af χ^2 -test er en ikke-kerneaktivitet i de nuværende læreplaner. Den fejler på begge punkter. (1): ved ikke at bygge i tilstrækkelig grad på sandsynlighedsteori (2): den udføres lige så godt i det χ^2 -forbrugende fag.
 - Dele af χ^2 -test kan være matematiske kerneaktiviteter, fx at tjekke, at kriterier for anvendelse er i orden, at opstille den relevante $m \times n$ tabel og bestemme frihedsgrader, at skelne mellem goodness-of-fit og uafhængighed.
 - At transformere Michaelis-Menten ligningen til en lineær model er en matematisk kerneaktivitet. At benytte transformationen i enzymkinetik er en ikke-kerneaktivitet.

Pointen med at inddrage konceptet er ikke at få lavet en 'facitliste' over kerneaktiviteter. En sådan eksisterer ikke. Nogle aktiviteter er i én sammenhæng en kerneaktivitet i andre ikke-kerne. Men der er naturligvis en vis konsensus. Det vigtige er at *gøre sig overvejelserne*.

Out- og insourcing

Dette handler om, hvilke resurser læreren anvender og lader eleverne anvende i sin tilrettelæggelse og styring af den didaktiske proces. *Insourcing* betyder, at en given matematisk aktivitet skal udføres med *interne resurser*, dvs. inden for en matematisk velfunderet organisering af elevernes (og lærerens) aktuelle faglige beredskab. Outsourcing betyder, at aktiviteten udføres med *eksterne resurser* ('outsourcing-udbydere'). At resursen er ekstern indebærer, at man har afgivet kontrol over aktiviteten.

Begreberne er tænkt i relation til benyttelse af digitale teknologier, men de er helt generelle:

Eksempler:

- At finde løsninger på hjemmeopgaver på Internettet er (ekstrem) outsourcing.
- At lade sin undervisning styre af lærebogen indebærer outsourcing.
- Black-bokse i CAS er outsourcing.

Kerneaktiviteter skal insources, således at der er matematisk kontrol med aktiviteten. Dvs. den kan *begrundes* fyldestgørende og aktivitetens udkomme kan *efterprøves*. Ikke-kerneaktiviteter er kandidater for outsourcing. Nogle simple eksempler: multiplikation af tal med få cifre er en kerneaktivitet (i bestemte sammenhænge) og må ikke outsources til fx lommeregner, multiplikation af mange-cifrede tal er en ikke-kerneaktivitet, og kan outsources. Løsning af simple ligninger af en given type er en kerneaktivitet (i bestemte sammenhænge) og må ikke outsources, løsning af komplicerede ligninger (fx 'grimme' koefficienter) er en ikke-kerneaktivitet og kan outsources.

Det er vigtigt at bemærke den strategiske overvejelse, der ligger bag. Multiplikation af 2-cifrede tal på en lommeregner er outsourcet, når aktiviteten drejer sig om undervisning i multiplikation som begreb, men kan være insourcet, fx når eleverne har nået et stade, hvor de (ubesværet) kan kontrollere facit. To centrale aktiviteter er tegning af grafer for funktioner og løsning af ligninger. Lærerens beslutninger om in- og outsourcing af disse aktiviteter er afgørende for elevernes læringsudbytte. At outsource kan betyde en frigørelse. Man får flere resurser til kerneaktiviteter, altså større læringspotentiale. At outsource kerneaktiviteter kan indebære afkald på læring.

Kerneaktiviteter, out- og insourcing er nærmere beskrevet i (Bang et al, 2016). For en udfoldelse med afsæt i folkeskolematematik, se (Grønbæk, 2016).

13 Referencer

- Bacher-Jensen, C., Iversen, S. M., Laursen, K. B. & Ulriksen, L. (2011) Gymnasiets drenge – matematikfagets drenge, FoU rapport 126152, UVM.
- Bang H., Grønbæk N., Larsen C. (2016) *Out- and insourcing, an analysis model for use of instrumented techniques*, CERME 10 8 pages (submitted)
- Brown, R. G. (2010) Does the introduction of the graphics calculator into system-wide examinations lead to change in the types of mathematical skills tested? *Educ. Stud. Math.*, 73, 181–203
- Bundsgaard, J., Puck, M. R. (2016). *Nationale test: Danske lærere og skolelederes brug, holdninger og viden*. DPU, Aarhus Universitet og Center for Anvendt Skoleforskning ved University College Lillebælt.
- Chevallard, Y. (2009). Un concept en émergence : la dialectique des médias et des milieux. In G. Gueudet & Y. Matheron (Eds), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques*, année 2007, pp. 344-366. Paris : IREM de Paris 7.
- Christensen, Brian Krog (2012). Brobygning i Silkeborg, LMFK-bladet 1-2012;
- Drijvers, P. (2015) Digital Technology in Mathematics Education: Why It Works (Or Doesn't), in S.J. Cho (ed.), *Selected Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education*, Springer, 2015.
- EACEA (2011). *Mathematics Education in Europe: Common Challenges and National Policies*, doi:10.2797/72660.
- Ebbensgaard, Aa. B., Jacobsen, J. C., Ulriksen, L. (2014) Overgangsproblemer mellem grundskole og gymnasium i fagene dansk, matematik og engelsk, IND's skriftserie, 37, KU.
- EVA (2015a) *Gymnasiet nu og fremover*, Danmarks Evalueringsinstitut.
- EVA (2015b) *Gymnasieelevers baggrund og forskellighed*, Danmarks Evalueringsinstitut.
- Grønbæk N. (2016) CAS eller Ka' selv, in Uhl Pedersen, J. & Spahn, K. S. (eds.) *Matematik med IT* 100-119, Forlaget Matematik.
- Gueudet, G. (2013) Why is University Mathematics Difficult for Students? Solid Findings about the Secondary-Tertiary Transition, *Newsletter of the European Mathematical Society* 90, 46 – 48.
- Hansen, H.C. et al. (2011). *Moderne matematiske færdigheder fra skolestart til studiestart*, Et udredningsarbejde finansieret af Undervisningsministeriet 2010- 2011, fra https://fou.emu.dk/offentlig_show_projekt.do?id=162957

-
- Kieran C., Doorman M., and Ohtani M. (2015) Frameworks and Principles for Task Design. In A. Watson, M. Ohtani (eds.), *Task Design In Mathematics Education*, New ICMI Study Series, DOI 10.1007/978-3-319-09629-2_2
- Manin, Y.I. (2007) *Mathematics as Metaphor*, AMS Collected Works Vol. 20, Providence, USA
- Matematiklærerforeningen (2015) Rapport om nye eksamensformer stx Tænk tankens anbefalinger <http://lmfk.dk/pics/647.pdf>
- MBUL (2015) *Matematikudredningen*, Jessen, B., Holm C. Winsløw C. for Danish Ministry of Children, Education and Gender Equality, Retrieved 2 September 2016 <http://www.uvm.dk/-/media/UVM/Filer/Udd/Gym/PDF15/Okt/151022-Matematikudredningen2015.ashx>
- Michelsen, C., & Iversen, S. M. (2009). Samspillet mellem matematik og de andre fag i gymnasieskolen-Matematikfaget og reformen af de ungdomsgymnasiale uddannelser. *MONA-Matematik-og Naturfagsdidaktik*, (2).
- Niss, M. and Jensen, T. H. (2002). *Kompetencer og matematiklæring. Idéer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark* (in Danish). Uddannelsesstyrelsens temahæfteserie nr. 18. Undervisningsministeriet
- Niss, M. (2012) Models and Modelling in Mathematics Education, *Newsletter of the European Mathematical Society* 86, 49-52.
- OECD (2015), *Students, Computers and Learning: Making the Connection*, PISA, OECD Publishing. from <http://dx.doi.org/10.1787/9789264239555-en>
- Skjoldager, S. (2014) The Development of Mathematics-Related Beliefs in Danish Upper Secondary School Students, PhD Dissertation, RUC. Stampe, S. B., Nielsen, H. V., & Hjorth, M. S. (2012) Læsning af matematikfagtekster i gymnasiet-Identificering af gymnasiefremmede elevers læsevanskeligheder og udvikling af metoder til forbedring af læsestrategier. *MONA-Matematik-og Naturfagsdidaktik*, (1).
- Steinbring, H. (1994). Dialogue Between Theory and Practice in Mathematics Education. In Biehler, R., Scholz, R. W., Strässer, R. & Winkelmann B. *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*, Dordrecht: Kluwer. Ulriksen, L., Ebbensgaard, A. H. B., & Holm, C. (2013). *Fag og gymnasiefremmede: Rapporter fra to runder af udviklingsprojekter*. København: Institut for Naturfagenes Didaktik, Københavns Universitet. (IND's Skriftserie).
- UVM (2014). *Progression og Elevernes Faglige Udvikling*. Kontoret for de Gymnasiale Uddannelser, Undervisningsministeriet.
- Ågård, D. (2015) *Motivation*, København: Frydenlund.